La relativité restreinte

La connaissance est le patrimoine de l'humanité, donc chaque être humain peut l'utiliser librement mais il a aussi le devoir de le protéger, partager, améliorer.

Morphocode CODE

Copyright

Titre: La relativité restreinte

Auteur: Morphocode CODE

Site web: https://fan2cube.fr

Version: 17.8-23.4.21

© Août-2017, Morphocode CODE

ISBN **:** 979-8-4494-6439-2

ALL RIGHTS RESERVED. This book is protected by international copyright laws. Any unauthorized use of this book to earn money is strictly prohibited, only use for personal purposes is permitted.

Préface

Tout homme cultivé, ou étudiant scientifique a un jour le désir de savoir ce que c'est la relativité.

La relativité est une théorie physique proposée par Einstein, elle a 2 saisons :

- Saison 1 : La relativité restreinte (1905)

- Saison 2 : La relativité générale (1915)

La relativité générale est réputée très compliquée du point de vue mathématique et conceptuel. En effet pour comprendre la relativité générale et ses formules, il faut avoir un niveau ≥ BAC+2 + un module de calcul tensoriel ... mais le concept, à mon avis ne pose pas de grande difficulté.

Par contre la relativité restreinte pose énormément de problème conceptuel, bien que mathématiquement il suffit d'avoir un niveau Ter scientifique pour comprendre les formules. Le problème conceptuel de la relativité restreinte provient de 3 raisons :

1. Comme la relativité restreinte est difficile, peu de gens comprennent vraiment donc beaucoup de gens disent n'importe quoi (surtout dans les forums) pour montrer qu'on est intelligent et on connaît le sujet ... et comme les auditeurs ne peuvent pas vérifier ce qu'ils disent ça fait vraiment des pagailles pas possible pour ceux qui veuillent comprendre la relativité restreinte.

2. Les gens qui ont compris la relativité restreinte mais incapables de transmettre l'information, la vérité, la théorie. À chaque fois qu'ils veuillent expliquer, ils utilisent un faux codage d'information en utilisant le mauvais vocabulaire ce qui fait que l'auditeur comprend à l'envers ! le contraire de ce que la théorie doit l'être.

3. Notre monde de tous les jours est newtonien, nous somme nés dans le monde newtonien, raisonner en newtonien, nous n'avons pas l'einsteinien dans le sang.

- Les gens (les médias, les livres de vulgarisation, les forums, les vidéos ...) disent n'importe quoi, on ne sait pas ce qui est vrai ce qui est faux.

- Ceux qui comprennent à l'envers la théorie racontent aux autres ... transmettent donc de faux concepts !

- Le monde est newtonien, impossible de vérifier une expérience pour une personne standard normal ...

Tout ça pour un novice qui veut apprendre connaître la relativité restreinte ce n'est pas évident de s'en sortir !!

Mais ne vous inquiétez pas ce livre est pour vous, un peu de patience lisez le doucement et vous comprendriez sûrement ce que c'est la relativité restreinte !

Avant de faire quoi que ce soit , voici un devis pour vous aider à comprendre la relativité restreinte quoique qu'on dise :

La relativité restreinte d'écrit la réalité d'un objet suivant qu'on est mobile ou immobile par rapport à cet objet, il y a donc deux réalités différentes.

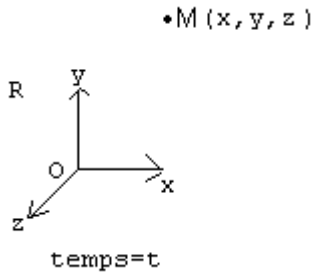
1 LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE

1.1 RÉFÉRENTIEL

Pour étudier les phénomènes, les événements, ... on doit se donner un repère R(x,y,z) pour repérer ces phénomènes, ces événements où ça se passe ... et aussi une horloge H pour mesurer le temps t , la durée des phénomènes, quand ça s'est passé, une règle T pour mesurer la distance et enfin un observateur P ... L'ensemble $\mathfrak{R}$=(R,H,T,P) s'appelle un référentiel, une fois le référentiel $\mathfrak{R}$ est donné l'observateur P est par définition l'observateur actif.

NOTE : Par abuse de langage on dit le référentiel R au lieu de $\mathfrak{R}$.

La relativité restreinte décrit le monde qui s'est présenté à P (l'observateur actif), c'est-à-dire comment P perçoit le monde , comme un spectateur (P) regardant un film (le monde) , les personnages du film ne voient pas P, ce sont des observateurs passifs. Vous verriez pourquoi on introduit le concept "l'observateur actif" , "l'observateur passif" c'est très important pour comprendre la relativité restreinte.



Un point M de l'espace est repéré par ses trois coordonnées (x,y,z) et comme M varie dans le temps les x,y,z sont en fonction du temps t.

M en fonction de x,y,z et x,y,z, en fonction de t

$$M(x,y,z) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

<u>Référentiel galiléen ou inertiel</u>

On se donne un référentiel R, n'oubliez pas c'est la donné de :

1) Un repère R(x,y,z)

2) Une horloge H (ayant un certain rythme) donc un temps t, qui est propre, lié à R.

3) Une règle T (ayant une certaine unité de longueur) pour mesurer la distance, qui est propre, lié à R.

4) Un observateur P.

Soit M une particule libre, c'est-à-dire ne sous mise à aucune force (extérieure), la vitesse de M par rapport à R par définition est:

$$\frac{dM}{dt} = v$$

si v = C^{te} = constante alors on dit que R est un référentiel galiléen ou inertiel. Donc dans un référentiel galiléen une particule libre soit immobile soit avoir un mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : un référentiel R' qui a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à R est un référentiel galiléen.

1.2 TRANSFORMATION

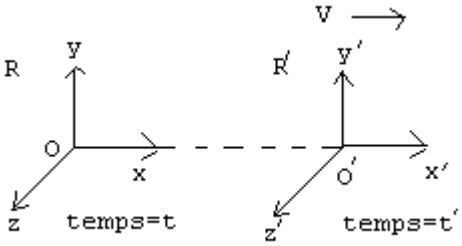
Soit R un référentiel galiléen, et R' un autre référentiel galiléen R'(x',y',z') , t', ayant a un mouvement rectiligne uniforme (par rapport à R) dans le sens Ox de vitesse constante $V=V_{R'/R}$, et on compte le temps à partir du moment où les origines O et O' sont en coïncidence. L'origine O' a donc un mouvement rectiligne uniforme (par rapport à R). On dit que R et R' sont en configuration standard.

On veut trouver une transformation qui fait passer de R à R' en conservant la relation

f = m a

c'est-à-dire on aura

f' = m a'



Allons y:

Voyons ce qui se passe pour O'.

O' se déplace à la vitesse V par rapport à R donc sa coordonnée x dans R vaut

x = Vt

au lieu de regarder O' on peut regarder n'importe quel point A' (sur l'axe O'x') de R' de coordonnée x' dans R'. A' se déplace aussi à la vitesse V, donc sa coordonnée x dans R vaut

x = x' + Vt

ou encore

$x' = x - Vt$

et on a évidemment

$t' = t$ (le même temps pour tout le monde)

voilà la transformation:

$R(x,y,z)\ ,\ t \Rightarrow R'(x',y',z')\ ,\ t'$

$$\begin{cases} t' = t & (1) \\ x' = x - Vt & (2) \end{cases}$$

Cette transformation se nomme transformation de Galilée. On voit qu'elle conserve l'accélération a, en effet d'après (2)

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V$$

car $t' = t$ d'après (1), puis

$$\frac{d^2x'}{d^2t'} = \frac{d^2x}{d^2t}$$

c'est-à-dire

a' = a et

f' = m a' = m a = f.

f est invariant par la transformation de Galilée

<u>La loi de composition des vitesses.</u>

de (2) ça donne

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V$ car t'=t

Or par définition la vitesse de M par rapport à R' est:

$v' = \frac{dx'}{dt'}$

et la vitesse de M par rapport à R :

$v = \frac{dx}{dt}$

d'où

$$\boxed{v' = v - V}$$

c'est la formule des vitesses.

1.3 PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ

Le principe de réciprocité[¤] : Selon ce principe, les lois de la mécanique ne dépendent pas des référentiels galiléens, c'est-à-dire une loi a la même forme dans toutes les référentiels galiléens . Par ex si dans R on a:

x = cos(t)+Ky

alors dans R' on aura aussi la même forme

x' = cos(t')+Ky' .

de même si dans R on a les relations:

(1.3.1) $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = A_{R/R'} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$

Alors le principe de réciprocité dit dans R' on aura :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = A_{R'/R} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Attention !! ce n'est pas le système inverse de (1.3.1) ! le système inverse vaut :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = A^{-1}_{R/R'} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Les matrices $A_{R'/R}$ et $A^{-1}_{R/R'}$ ne sont pas forcement les même.

Les relations, les équations ... ont la même forme dans les deux référentiels (qui se lient par la transformation de Galilée) on dit que les lois de la mécanique sont invariantes par la TG (Transformation de Galilée), ou qu'elles sont covariantes vis à vis la TG. Et voilà pour la partie "cinétique" (repère + transformation)

(¤) Traditionnellement on l'appelle "Le principe de relativité galiléen" pour ne pas confondre avec le principe de relativité nous l'appelons "le principe de réciprocité"

On va s'occuper maintenant la partie "dynamique".

Une particule M de masse m non nulle m≠0, est caractérisée par:

¤ l'énergie : $E = \frac{1}{2}mv^2$

¤ l'impulsion : $p = mv$

→ Pour un photon ξ (particule de masse nulle) on a:

¤ $E = h\nu$; h=la constante de Planck, ν=fréquence

¤ $p = \frac{h\nu}{c}\ell$; ℓ=vecteur unitaire suivant la direction de propagation

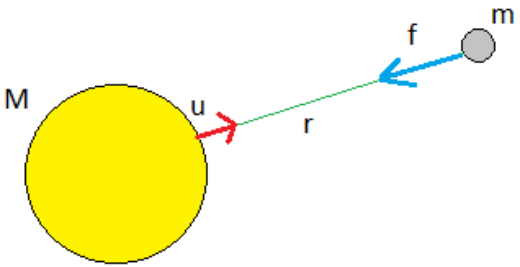
La variation de E, elle est reliée à la puissance $\mathcal{P}$=f.v :
$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}$
La variation de v, $\frac{dv}{dt} = a$, quant à elle , elle est reliée à la force f , c'est le principe fondamental de la dynamique :

f = ma

ou

$$\frac{dp}{dt} = f$$

Et la dernière donnée c'est la gravitation



La gravitation : M attire m suivant la formule :

$$f = -G\frac{Mm}{r^2}\ u \text{ (Newton)}$$

u=vecteur unitaire suivant la direction (Mm)

Remarque:

1. Il est possible qu'un objet soit en mouvement, alors qu'il n'y aucune force qui exerce sur lui (cas v=constante ≠ 0)

2. Une fois choisir un référentiel galiléen R , on se moque s'il bouge ou pas !!! dire que R est fixe ou absolument fixe ça veut rien dire !!! tout ce qu'on demande à R c'est d'être galiléen, que R soit en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel ou non ça nous est égal ! On

a notre référentiel galiléen R , on fait des mesures, on travaille, on compare les résultats ... c'est tout !

Résumons

Newtonien :

1) Référentiel galiléen: R(x,y,z), t

2) Transformation de Galilée: R(x,y,z), t $\Rightarrow$ R'(x',y',z'), t'

$$\begin{cases} t' = t \quad (1) \\ x' = x - Vt \quad (2) \end{cases} ; \; V = V_{R'/R}$$

3) Le principe de réciprocité :

Les lois de la mécanique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens R.

Caractéristiques d'une particule de masse m≠0 :

4) Énergie: $E = \frac{1}{2}mv^2$ (photon: $E=h\nu$)

5) Impulsion: $p = mv$ (photon: $p=\frac{h\nu}{c}\ell$)

6) Puissance : $\frac{dE}{dt} = f.v = \mathcal{P}$ (puissance de la force f)

7) Loi fondamentale (Newton) : $\frac{dp}{dt} = f$; (f = ma)

8) La gravitation (Newton):

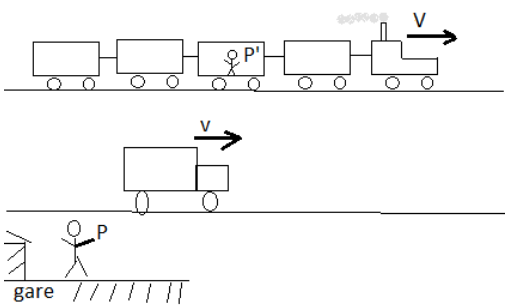
$f = -G\frac{Mm}{r^2}\,u$ (Newton)

2 LA NAISSANCE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

* La relativité restreinte est née d'une expérience qu'on n'arrive pas à expliquer avec la mécanique classique (newtonienne).

I. Un observateur P qui se place devant la gare voit passer une voiture à la vitesse v=250 km/h . Un autre observateur P' qui se trouve dans un train roulant à V=100 km/h (par rapport à la gare, et dans la même direction que la voiture) voit passer la voiture beaucoup moins vite que P la voit , plus précisément P' voit la voiture roulant à v'=150 km/h (par rapport à lui) .

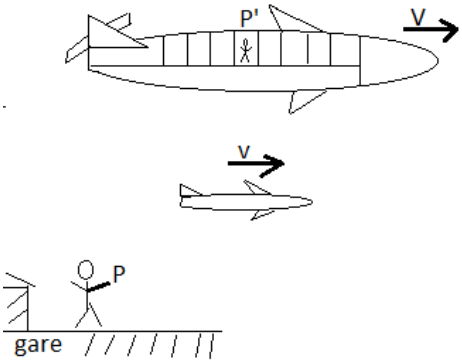
v' = v - V



II. Le même scénarios pour un avion de chasse.

Un observateur P qui se place devant la gare voit passer un avion de chasse à la vitesse v=1250 km/h. Un autre observateur P' qui se trouve dans un avion commercial volant à V=1000 km/h (par rapport à la gare, et dans la même direction que l'avion de chasse) voit l'avion de chasse passe beaucoup moins vite que P le voit , plus précisément P' voit l'avion de chasse volant à v'=250 km/h.

v' = v - V



Si on remplace la voiture ou l'avion de chasse par la lumière on trouve c'=c !!! autrement dit P et P' voit la lumière à la même vitesse c !!

La mécanique classique ne peut pas expliquer pourquoi

c' = c

au lieu de

c' = c - V

Et puis on a enterré le problème ....

* Il y a un autre problème, c'est le conflit entre la mécanique newtonienne et l'électromagnétique de Maxwell.

En effet les équations de Maxwell, dans le vide (ρ=0 et j=0) conduisent aux équations d'ondes et ces équations ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée, alors que le principe de réciprocité dit que ces équations doivent avoir la même forme dans tout référentiel galiléen.

Rappelons brièvement les équations de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla . B = 0 \\ \nabla \wedge E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla . E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

Considérons maintenant une région de l'espace dans laquelle on ne trouve ni de charges électriques, ni de courants (dans le vide ρ=0, j=0) ces équations deviennent.

$$\begin{cases} \nabla . B = 0 \ (1) \\ \nabla \wedge E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \ (2) \\ \nabla . E = 0 \ (3) \\ \nabla \wedge B = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \ (4) \end{cases}$$

Attention !! se placer dans le vide ne signifie pas qu'il n'y a aucune source nulle part ! on se place dans un endroit où ρ et j valent zéro 0 c'est tout, mais ça ne signifie pas non plus que le champ (E,B) sont nuls !!

$\nabla\Lambda(\nabla \wedge \mathrm{E}) = -\dfrac{\partial(\nabla\Lambda \mathrm{B})}{\partial \mathrm{t}}$ d'après (2)

$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \mathrm{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}^2}$ après (4)

$\nabla\Lambda(\nabla\Lambda\mathrm{E}) = \nabla(\nabla.\mathrm{E}) - \Delta\mathrm{E} = -\Delta\mathrm{E}$ d'après (3)

finalement

$$\Delta \mathrm{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}^2} = 0$$

On montre de même manière pour B

$$\Delta \mathrm{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}^2} = 0$$

C'est l'équation d'onde, ça signifie que le champ (E,B) se propage à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ cette équation

$$\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} = 0$$

n'est pas invariante par la transformation de Galilée.

Voyons ça de plus prés:

Dans R, la différentielle df de f vaut:

(2.1.1) $\mathrm{df} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx}$

Cette même différentielle df , dans R' elle vaut

(2.1.2) $\mathrm{df} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}'}\mathrm{dt}' + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}'}\mathrm{dx}'$

La transformation de Galilée est

$$\begin{cases} \mathrm{t}' = \mathrm{t} \\ \mathrm{x}' = \mathrm{x} - \mathrm{Vt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{dt}' = \mathrm{dt} \\ \mathrm{dx}' = \mathrm{dx} - \mathrm{Vdt} \end{cases}$$

et (2.1.2) devient

$$\mathrm{df} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}'}\mathrm{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'}(\mathrm{dx} - \mathrm{Vdt})$$

$$\mathrm{df} = (\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}'} - \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'})\mathrm{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'}\mathrm{dx}$$

d'où en identifiant avec (2.1.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}'} - \mathrm{V}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'} \end{cases}$$

calculons maintenant

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial t'} - V\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - V\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} - V\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \;;\; \text{th Schwarz}$$

d'où l'équation d'onde change quand on passe de R à R' :

$$\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
$$= \Delta' - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\varepsilon_0\mu_0 V\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} - \varepsilon_0\mu_0 V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

Elle n'est donc pas invariante par changement de référentiel, et si on regarde de plus prés , on voit que la vitesse de l'onde $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ ne dépend pas du référentiel dans lequel on écrit l'équation, ça signifie que cette vitesse est indépendante du référentiel alors que d'après la transformation de Galilée la vitesse v doit changer si on change de référentiel !

v' = v - V

ça pose vraiment un problème théorique, mais là aussi personne n'arrive à donner une réponse...

Remarque : On pourrait objecter, ou se demander d'où vient l' égalité (2.1.2) ? en effet ce n'est pas très claire :

Une fonction dont l'écriture dans R est f(t,x) alors dans R' son écriture sera f'(t',x') en effet:

Une transformation qui fait passer de R à R'

$$\begin{cases} t' = t'(t) \\ x' = x'(x) \end{cases} ; \text{l'inverse} \begin{cases} t = t(t') \\ x = x(x') \end{cases}$$

alors on a:

f(t,x) = f(t(t'),x(x')) = g(t',x') c'est une fonction de t' et x' alors on pose par définition g $\stackrel{\text{def}}{=}$ f'

g(t',x') $\stackrel{\text{def}}{=}$ f'(t',x')

inversement

f'(t',x') = f'(t'(t),x'(x)) = h(t,x) c'est une fonction de t et x alors on pose par définition h $\stackrel{\text{def}}{=}$ f

h(t,x) $\stackrel{\text{def}}{=}$ f(t,x)

Donc si dans R l'écriture est df alors dans R' l'écriture sera (df)' $\stackrel{\text{def}}{=}$ d'f'

$$(df)' = d'f' = \frac{\partial f'}{\partial t'} dt' + \frac{\partial f'}{\partial x'} dx'$$

Or

$$df = \frac{\partial f}{\partial t'} dt' + \frac{\partial f}{\partial x'} dx'$$

ça signifie que

d' = d et f' = f ils sont invariants !! ce qui n'est pas vraiment très clair, pourquoi sont-ils invariants, il n'y a aucune raison pour que ce soit ainsi.

En fait, l'explication est suivante:

On considère que d est un vecteur, ses composantes dans la base (dt,dx) sont (∂_t , ∂_x)

d = ∂_tdt + ∂_xdx ; l'écriture dans R

ce même vecteur d a des composantes ($\partial_{t'}$, $\partial_{x'}$) dans la base (dt',dx') d'où

d = $\partial_{t'}$dt' + $\partial_{x'}$dx' ; l'écriture dans R'

C'est exactement quand vous passez de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

V(x, y) et V(r cosθ, r sinθ)

ceci explique l'égalité (2.1.2), En fait chercher les relations entre ∂_t, ∂_x, $\partial_{t'}$, $\partial_{x'}$ revient à faire un changement de base (dt,dx) en (dt',dx').

2.2 LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

Si la transformation de Galilée donne

c' = c - V

au lieu de

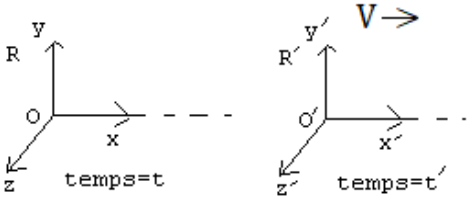
c' = c

c'est qu'elle est fausse !! il faut donc remplacer par une autre transformation qui donne exactement c' = c.

Einstein se demandait si une telle transformation existe ?

On se donne donc deux référentiels (galiléens bien sûr) R(x,y,z), t et R'(x',y',z') , t', où le référentiel R' a un mouvement rectiligne uniforme (par rapport à R) c'est à dire son origine O' a un mouvement rectiligne uniforme (par rapport à R), dans le sens Ox de vitesse constante $V=V_{R'/R}$

On veut trouver une transformation qui fait passer de R à R' en laissant invariant la vitesse de la lumière .



On peut tenter de chercher les transformations du type

$$\begin{cases} ct' = a(ct) + bx \\ x' = p(ct) + qx \end{cases}$$

Quatre paramètres à trouver a,b,p,q.

ou encore

$$\begin{cases} ct' = a(ct) - bx \\ x' = -b(ct) + ax \end{cases}$$

deux paramètres a,b à trouver,

ou encore plus simple !

$$\begin{cases} ct' = ch\mu.\, ct - sh\mu.\, x \\ x' = -sh\mu.\, ct + ch\mu.\, x \end{cases}$$

Une seule paramètre μ, à trouver !!!

si on trouve μ c'est Youpi !! on est content sinon bah, on se débrouillera autrement c'est tout !!!

Allons y cherchons les transformations de la forme

$$\begin{cases} ct' = ch\mu.\, ct - sh\mu.\, x \\ x' = -sh\mu.\, ct + ch\mu.\, x \end{cases}$$

avec $ch^2\mu - sh^2\mu = 1$

Il faut trouver μ, ou plus précisément chμ.

On regarde O' : O' est fixe dans R' donc x'=0, mais O' déplace à la vitesse V par rapport à R donc x=Vt

$$O' : \begin{cases} x' = 0 \\ x = Vt \end{cases}$$

0 = - shμ ct + chμ x

shμ ct = chμ x ; c'est ici que le "-" de -chμ est pratique.

$$\frac{sh\mu}{ch\mu} = \frac{x}{ct} = \frac{V}{c}$$

$$th\mu = \frac{V}{c}$$

$$th^2\mu = \frac{V^2}{c^2}$$

$$ch^2\mu - sh^2\mu = 1 \Rightarrow \frac{ch^2\mu}{ch^2\mu} - \frac{sh^2\mu}{ch^2\mu} = \frac{1}{ch^2\mu}$$

$$1 - th^2\mu = \frac{1}{ch^2\mu}$$

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = \frac{1}{ch^2\mu}$$

$$ch\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\frac{sh\mu}{ch\mu} = \frac{V}{c} \Rightarrow sh\mu = \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

si on pose

$$a = \gamma_{R'/R} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ et } \beta = \frac{V}{c} \; ; \; \gamma > 1$$

Notre transformation cherchée est

$$\begin{cases} ct^{'} = \gamma(ct - \beta x) \\ x^{'} = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases}$$

En écrivant complètement

$$\begin{cases} ct^{'} = \gamma(ct - \beta x) \\ x^{'} = \gamma(-\beta ct + x) \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z \end{cases}$$

Cette transformation est appelée transformation de Lorentz et le système inverse

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct^{'} + \beta x^{'}) \\ x = \gamma(\beta ct^{'} + x^{'}) \\ y = y^{'} \\ z = z^{'} \end{cases}$$

On peut écrire la transformation de Lorentz sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} ct^{'} \\ x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où

$$L^{i}_{j} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se nomme la matrice de Lorentz, i=ligne, j=colonne

et la matrice inverse

$$\ell^{i}_{j} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i=lig , j=col

Commentaire

Autre fois pour trouver la transformation de Lorentz on cherche les transformations de la forme:

$$\begin{cases} ct' = a(ct) - bx \quad (1) \\ x' = -b(ct) + ax \quad (2) \end{cases}$$

en s'appuyant sur le principe de réciprocité pour trouver a,b.

On regarde O' : O' est fixe dans R' donc x'=0, mais O' déplace à la vitesse V par rapport à R donc x=Vt

$$O' : \begin{cases} x' = 0 \\ x = Vt \end{cases}$$

ce qui donne d'après (2)

0 = -bct + aVt

b = aV/c ; c'est ici le -b est plus pratique.

d'où

$$\begin{cases} ct' = a(ct) - \dfrac{aV}{c}x \\ x' = -\dfrac{aV}{c}(ct) + ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = a(ct - \frac{V}{c}x) \\ x' = a(-\frac{V}{c}ct + x) \end{cases}$$

en résolvant le système on trouve:

$$\begin{cases} ct = u(ct' + \frac{V}{c}x') \\ x = u(\frac{V}{c}ct' + x') \end{cases}$$

où $u = \frac{1}{a(1 - \frac{V^2}{c^2})}$

Si dans R' on a les relations:

$$\begin{cases} ct' = a(ct - \frac{V}{c}x) \\ x' = a(-\frac{V}{c}ct + x) \end{cases}$$

Alors d'après le principe de réciprocité, dans R on aura :

$$\begin{cases} ct = a(ct' + \frac{V}{c}x') \\ x = a(\frac{V}{c}ct' + x') \end{cases}$$

et de

$$\begin{cases} ct = u(ct' + \frac{V}{c}x') \\ x = u(\frac{V}{c}ct' + x') \end{cases}$$

on en déduit que u = a

$$\frac{1}{a(1-\frac{V^2}{c^2})} = a$$

d'où

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Remarque : 1) On retrouve la transformation de Galilée à partir de la transformation de Lorentz en faisant $c \to +\infty$ on a alors $\gamma \to 1$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \\ x' = \gamma(-\frac{V}{c}ct + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = t \\ x' = -Vt + x \end{cases}$$

La mécanique newtonienne est la limite de la mécanique relativiste (einsteinienne)

2) La vitesse de la lumière c est une vitesse limite, aucun corps ne peut aller plus vite que la lumière ($\forall V, V<c$) sinon

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

devient γ=+∞ (V=c) ou un nombre complexe γ=ρ+σi (V>c) !!!

3) Si on veut avoir γ=n, il faut prendre :

$$V = c\sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}$$

par exemples

$$V = c\sqrt{\frac{2^2 - 1}{2^2}} = c\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \gamma = 2$$

$$V = c\sqrt{\frac{5^2 - 1}{5^2}} = c\sqrt{\frac{24}{25}} \Rightarrow \gamma = 5$$

Remarque : La transformation de Lorentz signifie aussi :

Un événement s'est produit, l'observateur P dans le référentiel inertiel R, le repère par (ct,x), ce même événement est repéré par un autre observateur P' dans un autre référentiel inertiel R' par (ct',x') et on la relation entre (ct,x) et (ct',x') :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases}$$

2.3 VÉRIFICATION

Voyons si la transformation de Lorentz vérifie nos exigeants

* L'invariance de la vitesse de la lumière c.

Si dans R , la vitesse de la lumière vaut c :

$x = ct$

alors dans R' que vaut la vitesse de la lumière c' ?, elle doit vérifier la relation

$x' = c't'$; c'est le principe de réciprocité.

de

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases} \Rightarrow$$

$x' - ct' = \gamma(-\beta ct+x) - \gamma(ct-\beta x) = - \gamma\beta ct + \gamma x - \gamma ct + \gamma\beta x$

mais $x = ct$ d'où

$= - \gamma\beta ct + \gamma ct - \gamma ct + \gamma\beta ct$

$x' - ct' = 0$

$x' = ct'$

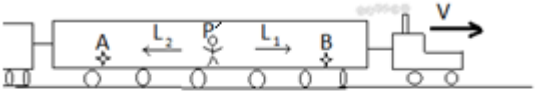
on a bien

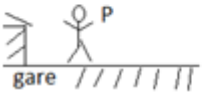
$c' = c$

La vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel galiléen.

L'invariant de la vitesse de la lumière (dans le vide bien sûr) nous conduit à la relativité des événements simultanés.

Voyons sur un exemple classique.





Un train se déplace à la vitesse V par rapport à la gare. On va considérer deux référentiels galiléens : la gare R et le train R'.

On place dans le train deux lampes A et B et un observateur P' au milieu de AB, il tient un dispositif émettant un flash, quand la lumière arrive aux lampes les frappe et les lampes s'allument.

l'observateur P' voit les lampes A et B s'allument simultanément. En effet la vitesse de la lumière par rapport au train est c , le temps que la lumière met pour

arriver de P' à A et le même qu'elle met pour arriver de P' à B car on a P'A=P'B

Un observateur P sur la gare voit la lumière L_2 arrive vers A à la vitesse c aussi, mais A bouge, il avance vers L_2 , par contre P voit la lumière L_1 , à la vitesse c court après B (B avance) . Donc la lumière L_2 arrive à A plus vite que la lumière L_1 arrive à B, la lampe A s'allume avant la lampe B. Il n'y a pas de simultanéité pour P.

* Une nouvelle formule des vitesses

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(ct')}{dt} = \gamma c - \gamma\beta\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dx'}{dt} = -\gamma\beta c + \gamma\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dt'}{dt} = \gamma - \gamma\dfrac{V}{c^2}\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dx'}{dt} = -\gamma V + \gamma\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = -\gamma V + \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx'}{dt'}\left(\gamma - \gamma\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = -\gamma V + \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$v'\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right) = -V + v$$

soit

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

Voilà la nouvelle formule des vitesses , elle est plus compliquée que l'ancienne.

Remarque : Quand on fait $c \to +\infty$ dans cette formule on retrouve l'ancienne formule v' = v - V

En remplaçant v par c on retrouve bien c' = c.

$$c' = \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}}$$

$$c' = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}}$$

c' = c

Donc la transformation de Lorentz est vraiment la transformation recherchée.

Lorsque la vitesse v de la particule n'est pas colinéaire avec V, on a les composantes de v : v_x, v_y, v_z se transforment ainsi

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v_y' = v_y \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}$$

$$v_z' = v_z \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}$$

En se souvenant que $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$, ...

* L'invariance de l'équation d'onde.

On veut changer la transformation de Galilée, pour que les lois d'électromagnétiques soient invariantes, notamment l' équation d'onde. Vérifions donc si l'équation d'onde est invariante par la transformation de Lorentz

On a déjà fait le calcul, mais refaisons-le , l'histoire de s'entraîner un peu pour les calculs.

On a une fonction f à deux variables :

f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(t,x) \to f(t,x)$

La différentielle df de f dans le référentiel R(ct,x,y,z) est

(2.3.1) $df = \partial_t dt + \partial_x dx$

cette même différentielle dans R'(ct',x',y',z') vaut

$df = \partial_{t'} dt' + \partial_{x'} dx'$

On a une transformation qui fait passer du référentiel R à R'

$$\begin{cases} t' = at + bx \\ x' = pt + qx \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dt' = adt + bdx \\ dx' = pdt + qdx \end{cases}$$

Le problème est savoir quelles sont les relations entre $\partial_{t'}$, $\partial_{x'}$, ∂_t , ∂_x ?

on a :

$df = \partial_{t'} dt' + \partial_{x'} dx'$

$df = \partial_{t'} (adt + bdx) + \partial_{x'} (pdt + qdx)$

$df = (a\partial_{t'} + p\partial_x)dt + (b\partial_{t'} + q\partial_{x'})dx$

en identifiant avec (2.3.1) on trouve

$$\begin{cases} \partial_t = a\,\partial_{t'} + p\,\partial_{x'} \\ \partial_x = b\,\partial_{t'} + q\,\partial_{x'} \end{cases}$$

calculons maintenant

$$\partial_{t^2}^2 = (a\,\partial_{t'} + p\,\partial_{x'})^2 = a^2\,\partial_{t'^2}^2 + 2ap\,\partial_{t'}\,\partial_{x'} + p^2\,\partial_{x'^2}^2$$

$$\partial_{x^2}^2 = (b\,\partial_{t'} + q\,\partial_{x'})^2 = b^2\,\partial_{t'^2}^2 + 2bq\,\partial_{t'}\,\partial_{x'} + q^2\,\partial_{x'^2}^2$$

pour la transformation de Lorentz on a

$$\begin{cases} t' = \gamma t - \gamma\beta x/c \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \end{cases}$$

d'où

$$\partial^2_{x^2} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t^2}$$
$$= (b^2 - \frac{a^2}{c^2})\,\partial^2_{t'^2} + (2bq - \frac{2ap}{c^2})\,\partial_{t'}\,\partial_{x'} + (q^2 - \frac{p^2}{c^2})\,\partial^2_{x'^2}$$

comme les coefficients valent:

* $\gamma^2(1-\beta^2)=1$

* $b = -\gamma\beta/c$, $a = \gamma \Rightarrow b^2 = \gamma^2\beta^2/c^2$, $a^2/c^2 = \gamma^2/c^2$,

$\Rightarrow b^2 - a^2/c^2 = -1/c^2$

* $p = -\gamma\beta c$, $q = \gamma$

$bq = -\gamma^2\beta/c$

$ap/c^2 = -\gamma^2\beta/c$

$\Rightarrow q^2 - p^2/c^2 = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$

ça donne

$$\partial^2_{x^2} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t^2} = \partial^2_{x'^2} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'^2}$$

finalement car y' = y et z' = z

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t^2} = \Delta' - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'^2}$$

L'équation d'onde est donc invariante.

Commentaire

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (1) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

* L'équation (1) montre que le temps n'est plus absolu !! il change suivant les référentiels, et en plus il dépend l'endroit où on se trouve.

* Il joue le rôle des coordonnées, le temps est une sorte de coordonnées

* On passe de référentiel R(x,y,z) à un référentiel R(ct,x,y,z) la relativité restreinte travaille donc un espace à 4 dimensions !!

Résumons en relativité restreinte :

1) Référentiel galiléen: R(ct,x,y,z)

2) Transformation de Lorentz: R(ct,x,y,z) ⇒ R'(ct',x',y',z')

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

3) Le principe de relativité :

* Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens R.

* La vitesse de la lumière c (dans le vide) est la même dans tout référentiel galiléen.

Et voilà la partie "cinétique" modifiée. On verra plus tard la modification de la partie "dynamique" .... Mais en attendant les cauchemardes arrivent ....

3 NOUVEAUX CONCEPTS DE LONGUEUR ET LE TEMPS

Ce chapitre est extrêmement important car c'est le cœur de la théorie.

A partir de la transformation de Lorentz, il passe des trucs très bizarres qui bouleversent nos deux concepts fondamentaux :

* la longueur et

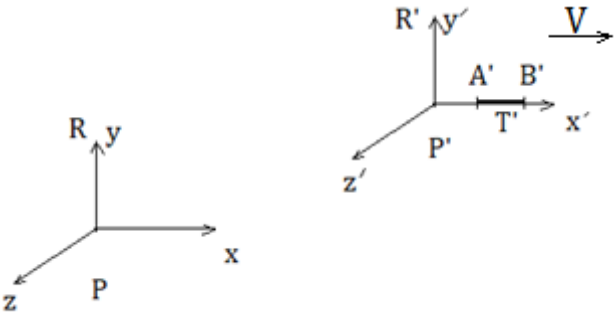
* le temps

Commençons par celui de la longueur.

3.1 LA LONGUEUR PROPRE

Définition : La longueur propre d'un objet c'est la longueur mesurée par rapport à un référentiel galiléen où l'objet est immobile, par exemple le référentiel attaché au objet (au dos de l'objet). Traditionnellement la qualité "propre" sera noté avec indice 0.

Soient R et R' deux référentiels galiléens en configuration standard et P un observateur de R , P' un observateur de R'.



On pose une règle T' dans R' et ses extrémités sont A' et B'. La longueur de T' dans R', c'est-à-dire P' mesure T' est (par définition) :

$L_{T'}^{P'} = x_{B'}' - x_{A'}'$

$L_{T'}^{P'}$ est la longueur propre de T', $L_{T'}^{P'} = L_0'$

Combien mesure-t-elle la règle T' pour P ?

La longueur de la règle T' pour P est (par définition) :

$L_{T'}^{P} = L = x_{B'} - x_{A'}$

or on a

$x' = \gamma(-\beta ct + x)$

$x_{B'}' = \gamma(-\beta ct_{B'} + x_{B'})$

$$x'_{A'} = \gamma(-\beta c t_{A'} + x_{A'})$$

$$x'_{B'} - x'_{A'} = \gamma(-\beta c t_{B'} + x_{B'}) - \gamma(-\beta c t_{A'} + x_{A'})$$

$$x'_{B'} - x'_{A'} = \gamma(x_{B'} - x_{A'}) - \gamma\beta c(t_{B'} - t_{A'})$$

L'astuce c'est de prendre une photo de la règle T' c'est-à-dire de prendre

$$t_{A'} = t_{B'}$$

d'où

$$x'_{B'} - x'_{A'} = \gamma(x_{B'} - x_{A'})$$

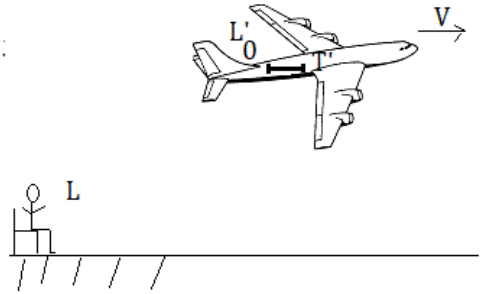
$$L'_0 = \gamma L$$

$$\boxed{L = \frac{L'_0}{\gamma}}$$

Comme $\gamma > 1$, la longueur propre L'_0 est toujours plus grande que la longueur mesurée L .

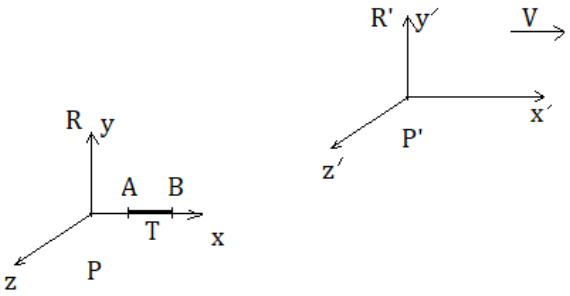
$$\boxed{L < L'_0}$$

L → Je suis fixe (L) mais mesure une règle mobile (L'_0).



On peut changer le rôle de P et P', le scénarios sera donc:

On pose une règle T (identique à T') dans R et ses extrémités sont A et B.



La longueur de T dans R , c'est-à-dire P mesure T est (par définition) :

$L_T^P = x_B - x_A$

L_T^P est la longueur propre de T (la longueur propre c'est la longueur par rapport à un référentiel galiléen où la règle est immobile). Traditionnellement la qualité "propre" sera noté avec indice 0, $L_T^P = L_0$.

Combien mesure-t-elle la règle T pour P' ?

La longueur de la règle T pour P' est (par définition) :

$$L_T^{P'} = L' = x'_B - x'_A$$

or le système inverse de Lorentz donne

$$x = \gamma(\beta ct' + x')$$

$$x_B = \gamma(\beta ct'_B + x'_B)$$

$$x_A = \gamma(\beta ct'_A + x'_A)$$

$$x_B - x_A = \gamma(\beta ct'_B + x'_B) - \gamma(\beta ct'_A + x'_A)$$

$$x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) + \gamma\beta c(t'_B - t'_A)$$

P' prend alors une photo de la règle T c'est-à-dire il prend

$$t'_A = t'_B$$

d'où

$$x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A)$$

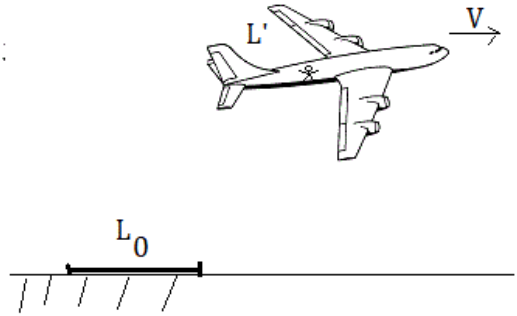
$L_0 = \gamma L'$

$$\boxed{L' = \frac{L_0}{\gamma}}$$

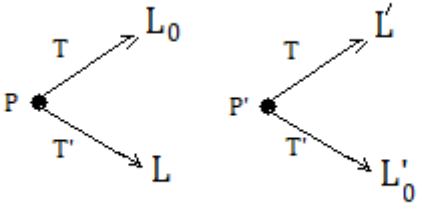
P' trouve bien , comme P le même "type" de formule : La longueur propre divisée par γ donne la longueur mesurée, et :

$L' < L_0$

L'→ Je suis mobile (L') mais mesure une règle fixe (L_0).



	T	T′
P	$L_T^P = L_0$	$L_{T'}^P = L$
P′	$L_T^{P'} = L'$	$L_{T'}^{P'} = L'_0$



$L_0 \rightarrow$ Je suis fixe (pas de prime), et je mesure ma propre règle (longueur propre).

$L \rightarrow$ Je suis fixe (pas de prime), et je mesure une règle mobile.

$L' \rightarrow$ Je suis mobile (avec prime), et je mesure une règle fixe.

$L_0^{'} \rightarrow$ Je suis mobile (avec prime), et je mesure ma propre règle (longueur propre).

NOTE :

1) On a :

* $L_0 = L_0^{'}$ puisque les deux règles T ,T' sont identiques.

* $L_{T'}^{P} = L_{T}^{P'}$ c'est le principe de réciprocité.

2) Il est intéressant de comparer les deux mesures $L_{T'}^{P} = L$ et $L_{T'}^{P'} = L_0^{'}$, avant Einstein on a $L = L_0^{'}$ mais après Einstein on a $L \neq L_0^{'}$!

Cette différence est résumée par la formule :

$$L = \frac{L_0^{'}}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma}$$

Dans la littérature de la relativité restreinte, on dit (à tort) qu' il y a une contraction de longueur, la règle en mouvement est plus courte que la règle au repos.

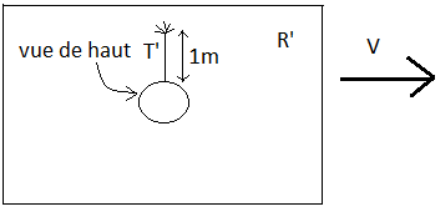
Arriver ici , on se pose pleine de questions dans la tête ...

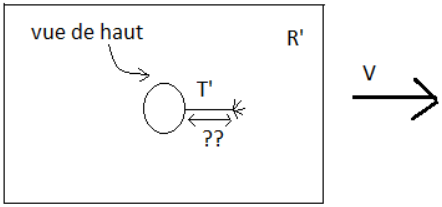
* Q1: Quelle est la vraie longueur de T' ? c'est L_0' ou L ??

* Q2: Pourquoi ne prend-t-on pas L_0' comme par définition la longueur de la règle T' (la longueur propre est la longueur de la règle) ?

* Q3: Un vaisseau R' se déplace dans l'espace vide à la vitesse $V = c\sqrt{\frac{3}{4}}$ par rapport à la Terre, Une personne ω dans R' écarte un bras T'=1m perpendiculairement à la direction du mouvement (voir fig) son bras mesure 1m (pour P). Puis elle tourne dans la direction du mouvement . Combien mesure son bras maintenant (pour P) ??

on a: $V = c\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \gamma = 2$ et T'=1m





¤ R1: La question n'est pas correcte ! car on a utilisé le vocabulaire newtonienne (ancienne théorie): le mot "longueur", la relativité restreinte est une nouvelle théorie elle a ses propres vocabulaires. En relativité restreinte le mot "longueur" n'existe pas !! pour une règle donnée T' il y a des "valeurs" associées à cette règle suivant les référentiels. Donc le mot "longueur" sera remplacé par le mot "valeur".

Dit: "quelle est la longueur de cette règle ?" n'a pas de sens (en relativité restreinte) car une règle n'a pas de longueur en soi !

On devrait dire :"quelle est la valeur de cette règle dans R ou dans R' ou dans R" etc .... ?"

Si on tient à conserver le mot "longueur" il faudra alors dire:

" quelle est la longueur de cette règle par rapport à R ou à R' ou à R" etc .... ?"

Mais alors ça embrouille l'esprit car pour lui une règle a une seule longueur !!!

à mon avis il vaut mieux utiliser le mot "valeur" que d'utiliser le mot "longueur"

Lorsqu'on veut utiliser la règle T' pour mesurer une table, une chaise, faire des calculs .... suivant on est dans R ou dans R' ... on prend sa valeur associée donnée par la formule

$$L = \frac{L_0'}{\gamma}$$

¤ R2 : Si on prend par définition la longueur propre L_0' comme la longueur de la règle T', ça signifie que la longueur est un concept absolue comme dans la théorie newtonienne, qu' on a privilégié le référentiel propre (référentiel par rapport auquel la règle est immobile) C'est justement Einstein a dit: aucun référentiel galiléen est privilégié , tout référentiel galiléen fait affaire, donc L est aussi valable que L_0' . Finalement une règle a plusieurs "longueur" ou plutôt plusieurs valeurs suivant on est dans un tel, un tel référentiel.

¤ R3: On parle des contractions de longueur, là aussi on a utilisé un mauvais vocabulaire. Le mot "longueur" déjà il faut éviter l'utiliser. Le mot "contraction" donne l'impression que physiquement la règle T' se contracte comme un ressort comprimé, que les molécules de la règle T' se rapprochent, se compriment, s'entassent .... or rien de tout ça ....

Il faut dire : "une règle en mouvement a une "valeur" plus petite qu'une règle immobile" Là on voit physiquement la règle n'est pas touchée, seulement les valeurs associées à la règle changent.

La phase: "la règle en mouvement est plus courte que la règle au repos" est assez dangereuse car elle suggère que physiquement la règle est touchée , sa morphologie changée, modifiée .....

P' et les habitants de R' voient le bras T' de ω toujours 1m , tout est normal dans le vaisseau R'. Si T' se contracte physiquement en 0,5m, ω sera vachement mal et il dira "aie ! aie !! ça fait mal ... " et on saurait que le vaisseau est en mouvement rectiligne uniforme , ce qui contredit le principe: "qu'on ne peut pas détecter un mouvement rectiligne uniforme si on est complètement isolé avec l'extérieur ".

à l'intérieur du vaisseau tout se passe normalement la valeur associée à cette règle T' vaut $L_0^{'}$.

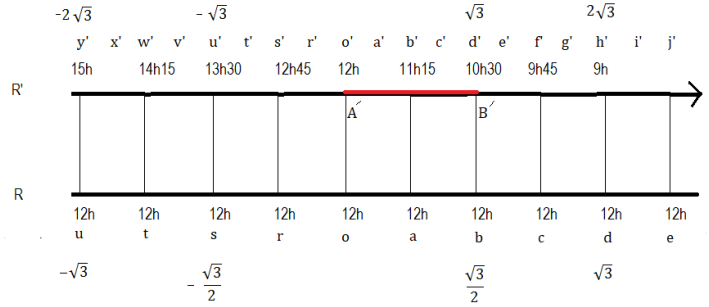
P et P' ne sont pas d'accord sur la valeur de T' c'est parce que des événements sont simultanés pour P' mais pas pour P.

Pour bien comprendre on va regarder sur un exemple.

On prend $V=c\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \gamma=2$, et pour simplifier les calculs on prend c=1 comme unité. Dans R tous les horloges sont synchronisés, de même dans R' mais les horloges de R et de R' ne sont pas synchronisées.

La transformation de Lorentz

$$\begin{cases} t^{'} = 2t - \sqrt{3}x \\ x^{'} = -\sqrt{3}t + 2x \end{cases}$$



La règle T'=[A'B'] sur R' mesure $\sqrt{3}$ m car pour P' les événements suivants sont simultanés

- (A',o') simultanés

- (B',d') simultanés

Mais pour P, l'événement B' n'est pas simultané avec d', B' est simultané avec b !!!

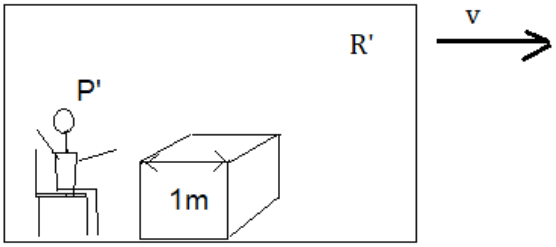
- (A',o) simultanés

- (B',b) simultanés

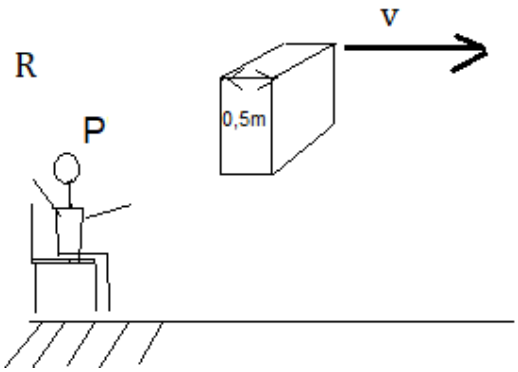
d'où P conclut que [A'B']=$\sqrt{3}/2$ m

Beaucoup de livres disent que la valeur T'=$\sqrt{3}/2$ n'est pas une réalité c'est un phénomène apparent, la vraie valeur de T' c'est $\sqrt{3}$, c'est complètement faux !! justement la relativité restreinte dit que toutes les deux $\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}/2$ sont des réalités, il n'y a pas de valeur privilégiée, il n'y a pas de phénomène apparent, il n'y a pas d'illusion ... ce sont des deux réalités différentes, des deux vérités ... $\sqrt{3}/2$ vaut autant que $\sqrt{3}$.

Dans un vaisseau R' qui se déplace à la vitesse V=c$\sqrt{\frac{3}{4}}$, et un cube 1x1x1m placé devant l'observateur P' il voit le cube 1x1x1m et tous les habitants de R' (du vaisseau) verraient ainsi



Dans R , l'observateur P voit un parallélépipède rectangle (non un cube) 0,5x1x1m qui bouge à la vitesse V, et tous les habitants de R verraient un parallélépipède ainsi.



on a deux réalités distingues c'est tout !!

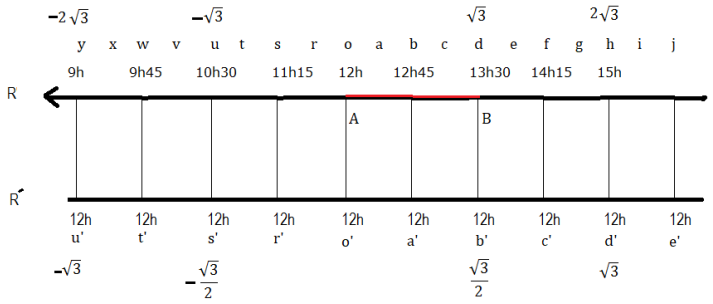
C'est normal qu'on aie deux réalités, si vous avez une mesure privilégiée, une seule réalité , une seule vérité vous revenez inconsciemment à la théorie newtonienne !!!! qui dit qu'une règle a une seule longueur, la longueur est absolue ...

Les mots comme "apparent", "contraction", "dilater" tuent la théorie !! ils décrivent le contraire de ce que la théorie devrait être.

Réciproquement , on place maintenant une règle T=[AB] (identique à T') sur R

le système inverse

$$\begin{cases} t = 2t' + \sqrt{3}x' \\ x = \sqrt{3}t' + 2x' \end{cases}$$



La règle T=[AB] mesure $\sqrt{3}$ m car pour P les événements suivants sont simultanés

- (A,o) simultanés

- (B,d) simultanés

Mais pour P', l'événement B n'est pas simultané avec d, B est simultané avec b' !!!

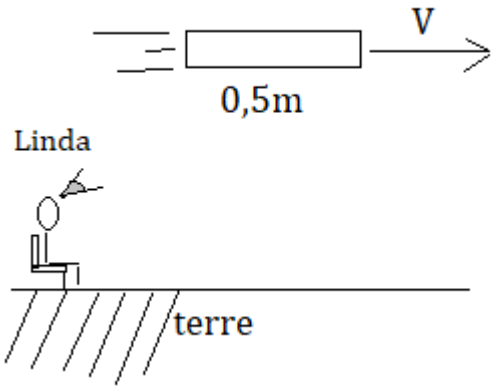
- (A,o') simultanés

- (B,b') simultanés

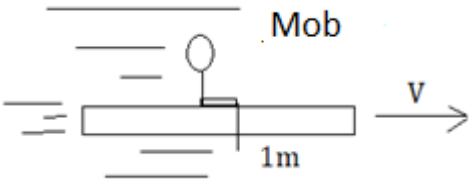
d'où P' conclut que [AB]=$\sqrt{3}/2$ m

Pour bien saisir on va suivre une histoire :

Linda assis sur le borde de la route et voit une règle volant à la vitesse V, il la mesure et trouve 0,5m



Quant-à Mob son ami assis à cheval sur le dos de la règle, il va ainsi à la vitesse V (par rapport à Linda) il aussi mesure la règle et trouve 1m.



Linda ne voit pas Mob sur la règle, ni Mob ne voit Linda sur le borde de la route.

Linda essaie de joindre Mob à son téléphone portable, le téléphone sonne et on décroche.

Linda: - Allo, C'est moi Linda, t'es où Mob ?

Mob: - Je suis sur la règle !!

Linda: - Ah bon !! mais je te vois pas !!

Mob: - Ah oui ?, moi non plus je ne te vois pas !!!

Linda: - Bahhh!!! c'est pas grave , dis , je mesure la règle elle vaut 0,5m

Mob: - Ah non non non pas du tout !!! elle vaut 1m
tu te trompes Linda !!
Linda: - Mais non, je me trompe jamais, je t'assure qu'elle vaut 0,5m . J'ai utilisé toutes les techniques pour mesurer la règle et toute donne le même résultat 0,5m.

Mob: - Mais voyons Linda, je suis sur la règle , je la touche et la mesure il n'y a pas de doute elle vaut 1m

.....

C'est un dialogue de sourd, finalement Linda et Mob décident de porter cet affaire devant le Juge fédéral.

Tous les deux contactent le Juge fédéral (au téléphone bien sûr) puis racontent longuement cette histoire.

Le Juge leur écoute ... attentivement ... puis rend le verdict:

Juge: - Vous avez tous les deux raison !! la valeur 0,5m est autant valable que la valeur 1m , donc toutes ces deux valeurs font affaire !!!

* Après le verdict Mob est sceptique !!! il pense qu'il a raison et que Linda a tort parce qu' il est sur la règle, il touche la règle donc sa mesure est la vérité , la réalité . Il pense que le Juge n'est pas juste, il est âgé , peut-être il se trompe ? En tout cas il n'accepte jamais que la valeur 0,5m est la longueur de la règle ! La règle a une seule longueur 1m c'est celle qu'il a mesurée.

* Linda est vraiment surpris de la verdict, ce verdict lui donne aussi raison, autrement dit la valeur 0,5m que Linda a trouvé vaut autant que celle de Mob 1m. Honnêtement , Linda pense que Mob a raison, puisqu'il est sur la règle et que le Juge lui a fait simplement un faveur c'est tout.

Linda est convaincu (comme Mob) que la seule valeur valable, réelle, la seule vérité est celle de Mob 1m. puisque Mob est sur la règle et puis Linda ne croit pas au verdict, il essaie alors de trouver une explication pourquoi il a trouvé 0,5m et non 1m comme Mob.

à force de cherche d'explication, renié le verdict... Linda a finalement trouvé une explication de sa valeur 0,5m :

Il y a quelque chose entre Linda et la règle, une sorte de loupe, qui déforme l'image de la règle, qui empêche d'avoir la vraie mesure ... ce qui fait que la règle ne mesure que 0,5m c'est donc quelque chose d'apparent ce n'est pas une réalité , une sort de mirage, d'illusion ... La valeur 0,5m n'est pas une réalité , n'est pas une vérité donc non valable contrairement comme le Juge prétend.

Et voilà .... si vous avez bien lu l'histoire vous verrez que nous raisonnons tous comme Linda, Mob .....

C'est parce que nous sommes tous des newtoniens ... le monde est newtonien nous n'avons pas la relativité dans le sang, nous ne sommes pas nés einsteiniens .....

Dans cette histoire c'est le Juge qui est einsteinien.

Qu'est ce que dit le Juge:

1. Tout ce que Linda perçoit est une réalité (donc pas d'illusion, pas de loupe déformation, rien entre Linda et la règle qui empêche la vérité)

2. Tout ce que Linda perçoit est une vérité (donc a autant de valeur, ce que perçoit Mob n'est pas la seule vérité, la seule réalité)

Avant Einstein: Tout ce que Mob perçoit, Linda perçoit exactement la même chose.

Après Einstein: Ce que Linda perçoit n'est pas la même chose que Mob perçoit. Il y a deux réalités différentes !

L' explication de la valeur que Linda a mesuré est simple, c'est la relativité de la simultanéité des événements.

Linda et Mob ont tous les deux un mètre [UV]=1 et supposons que le milieu du mètre est marqué I.

Lorsque Mob mesure la règle [A'B'] les deux bouts de la règle tombent exactement sur U et V: A'=U et B'=V

Lorsque Linda mesure la règle [A'B'] les deux bouts de la règle tombent exactement sur U et I: A'=U et B'=I

Pour Mob les événements (B',V) sont simultanés

Mais pour Linda B' et V ne sont pas simultanés , mais par contre c'est B' et I qui sont simultanés !!

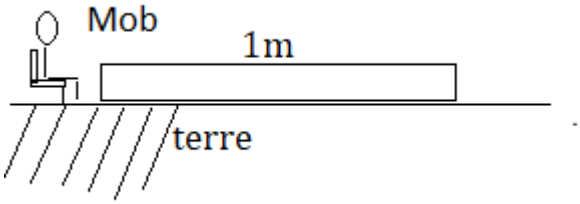
Et on sait bien qu'en relativité les événements sont simultanés pour l'un mais pas forcement pour l'autre.

donc 0,5m a autant de valeur que 1m.

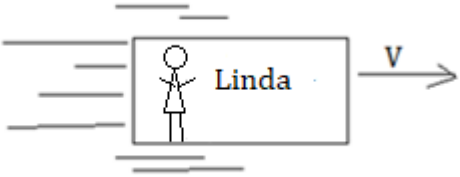
Finalement , il n'y a pas de loupe , pas de gaz, pas de choses entre Linda et la règle qui lui empêchent d'avoir la vérité, la réalité.

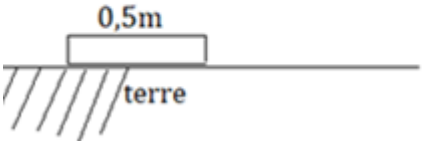
On pourrait renverser le rôle :

Mob assis sur le borde de la route avec une règle par terre.



Quant-à Linda son ami il est dans un vaisseau allant à la vitesse V, mais il ne voit pas Mob, ni Mob le voit .





Mob essaie de joindre Linda à son téléphone portable, le téléphone sonne et on décroche.

Mob: - Allo, C'est moi Mob, t'es où Linda ?

Linda: - Je suis dans un vaisseau allant à la vitesse V !!

Mob: - Ah bon !! mais je te vois pas !!

Linda: - Ah oui ?, moi non plus je ne te vois pas !!!

Linda: - Bahhh!!! c'est pas grave , dis , je mesure la règle elle vaut 0,5m

Mob: - Ah non non non pas du tout !!! elle vaut 1m

tu te trompes Linda !!

Linda: - Mais non, je me trompe jamais, je t'assure qu'elle vaut 0,5m . J'ai utilisé toutes les techniques pour mesurer la règle et toute donne le même résultat 0,5m.

Mob: - Mais voyons Linda, je suis à côté de la règle , je la touche et la mesure il n'y a pas de doute elle vaut 1m

.....

Le verdict est le même ...

On est fixe voit l'objet en mouvement, ou on est en mouvement voit l'objet fixe, c'est la même chose.

3.2 LE PARADOXE DU TRAIN ET LE TUNNEL

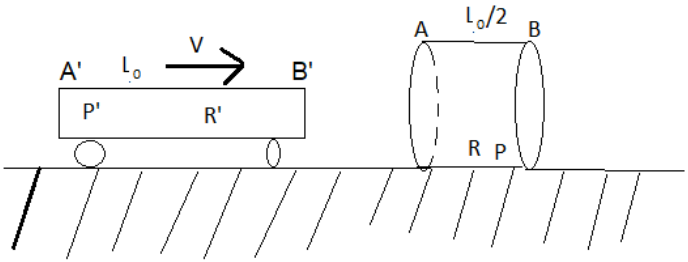
La formule

$$L' = \frac{L_0}{\gamma}$$

donne un tas de paradoxes , le plus connu est le paradoxe "le train et le tunnel"

La version courant de ce paradoxe est suivant:

¤ Scénario 1 :



On a un train R' de longueur au repos L_0 et un tunnel R de longueur $L_0/2$. Le train va à la vitesse V (par rapport à R) vers le tunnel.

Le point de vue de P : si le train a une la vitesse suffisamment grande il peut être entièrement à l'intérieur du tunnel en quelques instances, par ex si on prend

$$V = c\sqrt{\frac{15}{16}} \Rightarrow \gamma = 4$$

Le point de vue de P' : C'est le tunnel qui va à toute vitesse vers lui, et le tunnel devient encore plus petit donc le train ne pourra pas entrer entièrement dans le tunnel.

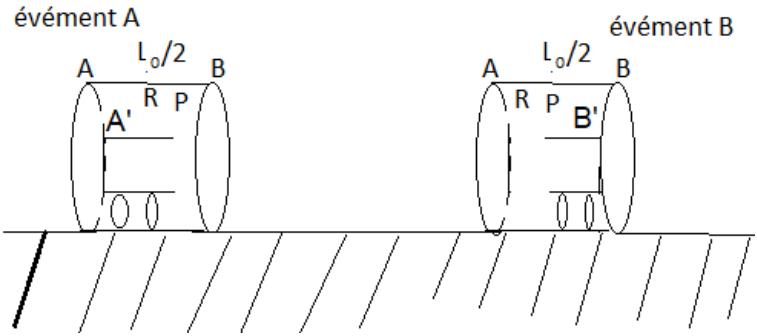
Ce sont de points de vue opposés, y a-t-il un paradoxe ??

Si vous répondez "oui" comme la plus part des gens (98%) c'est que vous n'avez pas très bien compris ce que c'est la relativité retreinte, et la définition du mot "paradoxe" !!!

Pour voir cela, traduisons le problème en terme d'événements.

* L'événement A signifie: la queue du train A' passe juste après la porte A : A'=A

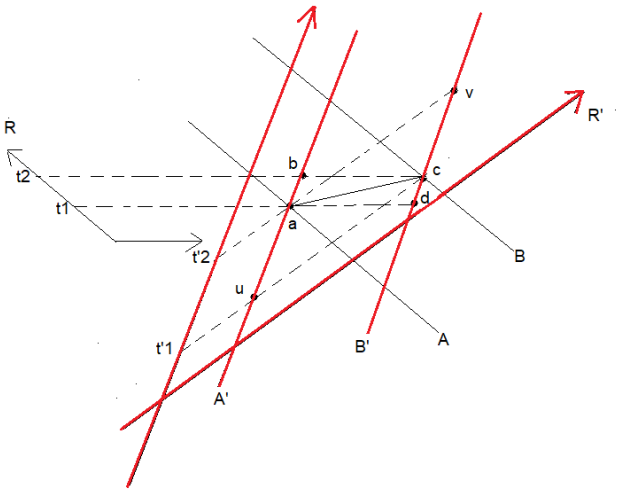
* L'événement B signifie: la tête du train B' touche la porte B : B'=B



Du point de vue de P : l'événement A s'est produit avant l'événement B , on écrit symboliquement A < B

Du point de vue de P' : l'événement B s'est produit avant l'événement A , on écrit symboliquement B < A

Voyons sur le diagramme ci-dessous



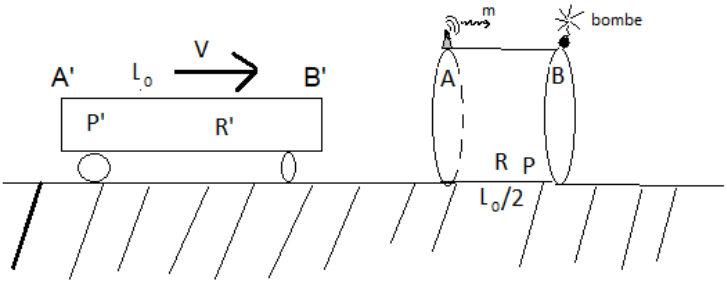
- On voit que pour P, l'événement (A'=A) s'est produit avant l'événement (B'=B) , $t_1<t_2$ et que le train est entièrement dans [AB] (pour un court instance), le parallélogramme abcd est entièrement dans la bande AB

- Par contre pour P', l'événement (B'=B) s'est produit avant l'événement (A'=A), $t'_1 < t'_2$ et que le train n'est jamais entièrement dans [AB] (on voit toujours un bout du train sorti du tunnel), le parallélogramme uavc est toujours dépassé la bande AB.

Or en relativité restreinte l'ordre des événements peut être inversé tout dépend de l'observateur, le scénarios 1 ne présente pas un paradoxe puisqu'il n'y a pas de contradiction contre la nouvelle théorie einsteinienne.

Pour avoir un paradoxe on va modifié la scénario 1 en scénario 2.

¤ <u>scénario 2</u> : c'est le même scénario 1 mais on ajoute une bombe armée en B, et un dispositif en A qui envoie un message m pour neutraliser la bombe.



* L'événement A signifie: la queue du train passe juste après la porte A (A'=A), et le dispositif en A envoie alors un message m pour neutraliser la bombe.

* L'événement B signifie: la tête du train touche la porte B (B'=B) et la bombe explore !!

* L'événement C signifie : la bombe explore.

<u>Du point de vue de P'</u> : La bombe explore, l'événement C s'est produit.

<u>Du point de vue de P</u> : La bombe n'explore pas, car le dispositif en A a neutralisé la bombe, l'événement C ne s'est pas produit.

Là il y a un paradoxe puisque la relativité restreinte ne permet pas d'éliminer des événements. Si un événement s'est produit pour un observateur, il s'est produit pour

tout observateur (dans des dates différentes ou non bien sûr) .

Ici C s'est produit pour P' mais pas pour P, il y a donc un paradoxe.

Pour fixer ce paradoxe il faut examiner attentivement le scénario 2.

Voyons ... on a dit que le message m, a neutralisé la bombe c'est un peu vite dit car rien ne prouve que le message m a suffisamment du temps pour neutraliser la bombe !!!

Voyons voir:

le message m a mis t_m temps pour atteindre la bombe

$$\frac{L_0}{2} = ct_m$$

de l'autre côté la tête du train B' met t temps pour toucher la porte B (B'=B).

$$\frac{L_0}{2} - \frac{L_0}{\gamma} = Vt$$

On doit comparer t_m et t.

Allons y

$$\frac{L_0}{2c} = t_m$$

$$\frac{1}{V}\left(\frac{L_0}{2} - \frac{L_0}{\gamma}\right) = t$$

Supposons que :

$t_m < t$

$$\frac{L_0}{2c} < \frac{1}{V}\left(\frac{L_0}{2} - \frac{L_0}{\gamma}\right)$$

$$\frac{V}{c} < \frac{\gamma - 2}{\gamma}$$

$$\frac{V}{c} + \frac{2}{\gamma} < 1$$

$$2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1 - \frac{V}{c}$$

$$4\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) < 1 - 2\frac{V}{c} + \frac{V^2}{c^2}$$

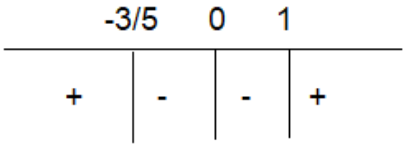
$$0 < 5\frac{V^2}{c^2} - 2\frac{V}{c} - 3$$

Étudions le signe de $(5x^2\text{-}2x\text{-}3)$

$\Delta = 4 + (4.5.3) = 64 = 8^2$

$x' = (2+8)/10 = 1$

$x'' = (2-8)/10 = -3/5$



comme $0 < \frac{V}{c} < 1$ donc le signe($5x^2$-2x-3) est négatif

donc : $t < t_m$

m n'a pas assez de temps pour neutraliser la bombe , la bombe explore aussi pour P !! c'est-à-dire l'événement C s'est produit aussi pour P, donc il n'y a pas de contradiction, il n'y a pas de paradoxe.

Résumer

1) Souvent le vocabulaire utiliser pour expliquer, d'écrire, d'interpréter, ... la relativité restreinte n'est pas adoptée, il appartient la plus part du temps à la théorie newtonienne, donc c'est clair qu'on ne peut pas expliquer une nouvelle théorie avec le vocabulaire d'ancienne théorie !

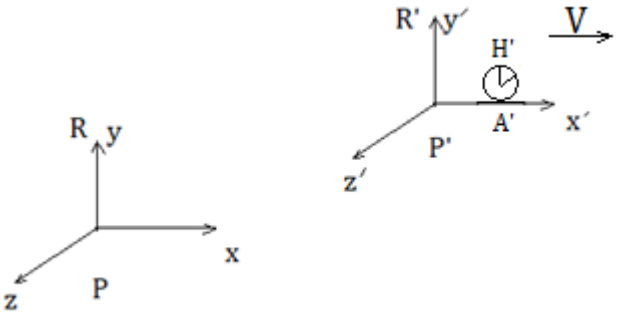
Je pense notamment les mots :
Longueur, contraction, apparaître, dilatation, ...
le sens de ces mots ne donnent pas une image réelle, vraie, exacte de la nouvelle théorie.

2) Il faut entraîner l'esprit pour qu'il s'adapte les nouveaux concepts tels que le temps, la longueur ...

3.3 LE TEMPS PROPRE

Définition : Le temps propre d'un objet c'est le temps mesuré par une horloge fixe par rapport à cet objet, par exemple l'horloge attaché au objet (au dos de l'objet).. Traditionnellement le temps "propre" sera noté τ .

Soient R et R' deux référentiels galiléens en configuration standard et P (resp. P') un observateur de R (resp. R') .



Dans R', On pose une horloge H' en A'. La durée mesurée de H' par P', entre deux instances $t'_{a'}$ et $t'_{b'}$ est par définition :

$$D^{P'}_{H'} = t'_{b'} - t'_{a'}$$

c'est-à-dire P' mesure H'.

$D^{P'}_{H'}$ est la durée propre de H' . Traditionnellement la qualité "propre" sera noté avec indice 0, $D^{P'}_{H'} = D'_0$

Pour P, Quelle durée D trouve-t-il ?

la durée D (mesurée par P) est par définition :

$D^{P}_{H'} = D = t_{b'} - t_{a'}$

c'est-à-dire P mesure H'

or on a

$ct = \gamma(ct' + \beta x')$

$ct_{a'} = \gamma(ct'_{a'} + \beta x'_{A'})$

$ct_{b'} = \gamma(ct'_{b'} + \beta x'_{B'})$

$ct_{b'} - ct_{a'} = \gamma\left(ct'_{b'} + \beta x'_{B'}\right) - \gamma(ct'_{a'} + \beta x'_{A'})$

$ct_{b'} - ct_{a'} = \gamma c\left(t'_{b'} - t'_{a'}\right) + \gamma\beta(x'_{B'} - x'_{A'})$

Mais H' est immobile dans R' c'est-à-dire $x'_{A'} = x'_{B'}$

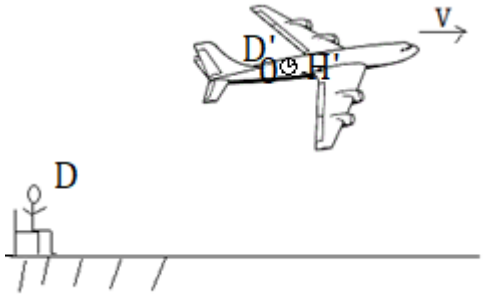
$t_{b'} - t_{a'} = \gamma\left(t'_{b'} - t'_{a'}\right)$

$D = \gamma D'_0$

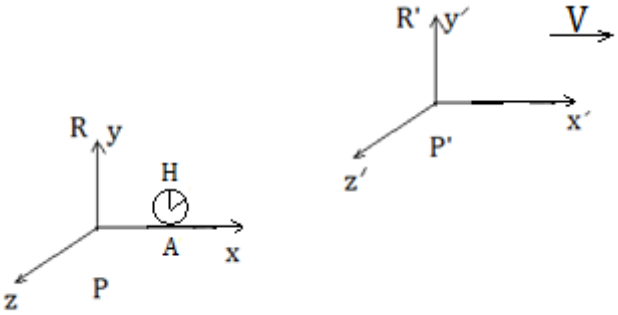
$\boxed{D = \gamma D'_0}$

Comme $\gamma > 1$, la durée propre est toujours plus petite que la durée mesurée dans un autre référentiel.

D → On est immobile (D) et observe une horloge mobile (D'_0).



On peut changer le rôle de P et P', le scénario sera donc:



Dans R, On pose une horloge H (identique à H') en A. La durée de H (mesurée par P) entre deux instances t_a et t_b est par définition :

$D_H^P = t_b - t_a$

c'est-à-dire P mesure H .

Par définition D_H^P se nomme la durée propre de H, la durée propre c'est la durée par rapport à un référentiel où

l'horloge est immobile. Traditionnellement la qualité "propre" sera noté avec indice 0, $D_H^P = D_0$.

Pour P', Quelle durée D' (P' mesure H) trouve-t-il ?

la durée D' est par définition :

$$D_H^{P'} = D' = t_b' - t_a'$$

or on a

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$ct_a' = \gamma(ct_a - \beta x_A)$$

$$ct_b' = \gamma(ct_b - \beta x_B)$$

$$ct_b' - ct_a' = \gamma(ct_b - \beta x_B) - \gamma(ct_a - \beta x_A)$$

$$ct_b' - ct_a' = \gamma c(t_b - t_a) - \gamma\beta(x_B - x_A)$$

Mais H est immobile dans R c'est-à-dire $x_A = x_B$

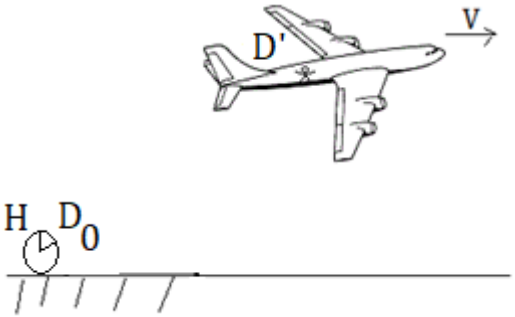
$$t_b' - t_a' = \gamma(t_b - t_a)$$

$D' = \gamma D_0$

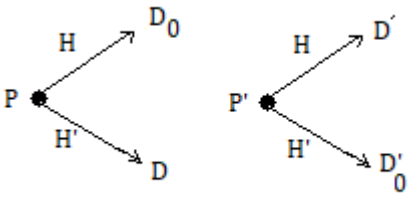
$$\boxed{D' = \gamma D_0}$$

P' trouve bien , comme P le même "style" de formule: La durée propre multipliée par γ donne la durée mesurée.

D' → signifie : On est en mouvement (D') et observe une horloge immobile (D_0) .



	H	H′
P	$D_H^P = D_0$	$D_{H'}^P = D$
P′	$D_H^{P'} = D'$	$D_{H'}^{P'} = D_0'$



D_0 → Je suis fixe, et je mesure ma propre horloge (durée propre).

D' → Je suis en mouvement, et je mesure une horloge fixe.

D → Je suis fixe, et je mesure une horloge mobile.

D_0' → Je suis mobile, et je mesure ma propre horloge (durée propre) .

NOTE : On a :

1) $D_0 = D_0^{'}$ puisque les deux horloges H ,H' sont identiques.

2) $D_{T'}^{P,} = D_T^{P'}$ c'est le principe de réciprocité.

Si on fixe l'origine du temps, ça revient de prend

$t_{a'} = t_{a'}^{'} = 0$

$t_a = t_a^{'} = 0$

et les formules deviennent simplement le temps, et non la durée.

$t = \gamma t_0^{'}$

$t^{'} = \gamma t_0$

pour nous on notera τ le temps propre $t_0^{'} = t_0 = \tau$

$$\boxed{t^{'} = t = \gamma\tau}$$

Le temps propre d'un objet est donc le temps mesuré par rapport à une horloge qui est fixe par rapport à cet objet.

Dans la littérature de la relativité restreinte, on dit qu' il y a une dilatation de durée, l'horloge en mouvement marche plus lentement que l'horloge au repos.

3.4 PARADOXE DES JUMEAUX

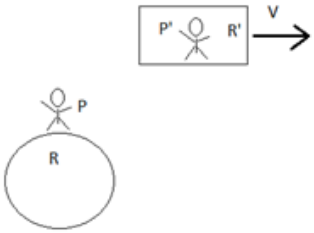
Comme dans le cas de longueur, la formule $D = \gamma D_0'$ génère un tas de paradoxes encore pire que les paradoxes sur la longueur !!! l'un de ces paradoxe est le fameux : le paradoxe "le voyageur de Langevin" on dit aussi le "paradoxe des jumeaux"

Traditionnellement ce paradoxe se présente ainsi.

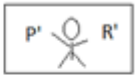
Scénario 1 :

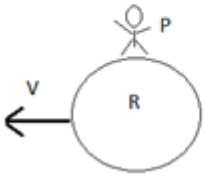
Deux jumeaux P et P' tous les deux ont 10 ans .

Point de vue de P : à l'instance t=t'=0, P' saute dans le vaisseau R' déplaçant à la vitesse $V = c\sqrt{\frac{24}{25}}$ (par rapport à la terre R) vers l'étoile A , arrivée en A, le vaisseau fait un demi-tour puis revient vers la Terre. Pendant le voyage de P', P a étudié la relativité restreinte et maintenant P a 80 (=10+70) ans d'après la relativité restreinte P conclut que P' est sûrement plus jeune que lui, quand la porte du vaisseau ouvre, P voit P' a 24 (=10+14) ans.



Point de vue de P' : à l'instance t=t'=0, Je (P') saute dans le vaisseau R' et vois la Terre s'éloigne à la vitesse V (par rapport à mon vaisseau R') vers l'étoile B , au bout de 7 ans dans mon vaisseau, je vois la Terre revient, elle s'approche de plus en plus . Pendant ce voyage j'ai étudié la relativité restreinte et maintenant j'ai 24 ans, j'ai passé 14 ans dans mon vaisseau, d'après la relativité restreinte je conclus que P est sûrement plus jeune que moi. Quand la porte du mon vaisseau est ouverte, P a 12,8 ans (=10 + 14/5) .





Là il y a un paradoxe (contre la théorie einsteinienne) , car tous les deux P et P' utilisent des formules de la relativité restreinte et tombent sur des conclusions opposées.

Traditionnellement on fixe ce paradoxe en observant que P et P' ne sont pas symétriques. P' n'est pas dans un référentiel galiléen !! (la phase demi-tour n'est pas galiléen) donc P' ne peut pas utiliser les formules de la relativité restreinte pour en conclure !

Seul P étant dans un référentiel galiléen peut utiliser la formule

(3.4.1) $t = \gamma\tau$

$(80 - 10) = 5(\tau - 10)$
$\tau = 24$

Mais on peut reprocher à P, d'utiliser cette formule pas vraiment dans les conditions !!

En effet la formule est établie lorsque les deux référentiels R et R' sont tous les deux galiléens (souvenez vous), alors que ici seul R est galiléen !!!

Mais en fait la formule est valable aussi quand R' est non-galiléen, en effet il suffit de "passer" en intégral. En effet si on considère un temps très petit $d\tau$ pendent ce temps le référentiel R' est galiléen car il prend un mouvement rectiligne uniforme pendant ce court instance. la formule (3.4.1) devient

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V(t)^2}{c^2}}\, dt$$

donc il suffit que dt soit galiléen on peut trouver τ. C'est normal, quand on est dans un référentiel galiléen on peut étudier les phénomènes dans les référentiels galiléens ou non (heureusement)

Ce paradoxe fût donné pour la première fois par Langevin en 1919 dans une conférence de la physique. Le but de Langevin est de montré que le fait une horloge en mouvement retarde entraîne une contradiction de la théorie.

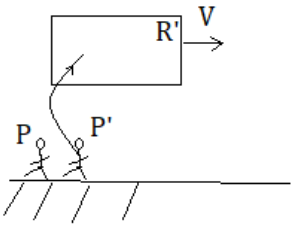
Mais vous pensez bien c'est une expérience de pensée, un scénario non réaliste ....

En tout cas ça ne peut pas contredire la théorie puisque les référentiels doivent être galiléens, P' ne pourra jamais revenir sur Terre !!! il est condamné à voyager indéfiniment ... dans l'espace... en mouvement rectiligne uniforme !!! Donc impossible de comparer les deux horloges, c'est-à-dire de mettre P et P' face à face !!! , donc pas de paradoxe !!!

On peut modifier le scénario 1 en scénario 2 de façon à avoir les référentiels galiléens :

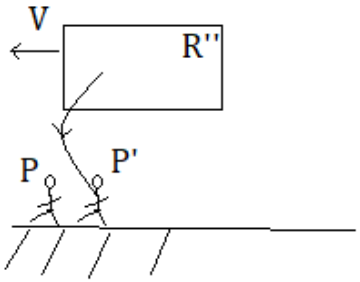
¤ Scénario 2 :

On a deux vaisseaux R' et R" qui se déplacent à la vitesse $V = c\sqrt{\frac{24}{25}}$ par rapport à la Terre mais dans des directions opposées et deux jumeaux P et P' de 10 ans



Point de vue de P : Quand le vaisseau R' arrive à la hauteur de la Terre, à cet instance là (t=t'=0) P' saute dans le vaisseau R' qui va vers l'étoile A , arrivée en A, P' saute dans le vaisseau R" qui va en direction de la Terre .

Pendant le voyage de P', P a étudié la relativité restreinte et maintenant P a 80 (=10+70) ans d'après la relativité restreinte P conclut que P' est sûrement plus jeune que lui, quand la porte du vaisseau R" ouvre, P voit P' a 24 (=10+ 70/5) ans .



<u>Point de vue de P'</u> : Quand le vaisseau R' arrive à la hauteur de la Terre, à cet instance là (t=t'=0), Je saute dans le vaisseau R' et voit la Terre s'éloigne à la vitesse V (par rapport à mon vaisseau R') vers l'étoile B , au bout de 7 ans dans mon vaisseau, je décide de sauter dans le vaisseau R" et je vois la Terre revient, elle s'approche de plus en plus . Pendant le voyage dans R", j'ai étudié la relativité restreinte, j'ai passé 7 ans dans R' et 7 ans dans R", et maintenant , j'ai 24 (=10+14) ans, d'après la relativité restreinte je conclus que P est plus jeune que moi. Quand la porte du vaisseau R" ouverte, P a 12,8 (=10+ 14/5) ans .

Si on ignore les sauts , on a bien 3 référentiels R,R',R" galiléens, donc P' peut appliquer les formules de la relativité restreinte. et là il y a un paradoxe (contre la théorie einsteinienne) , car tous les deux P et P' utilisent des formules de la relativité restreinte et tombent sur des conclusions opposées.

Pour fixer ce paradoxe , on doit faire appel à la relativité générale pour expliquer les sauts. En effet en sautant on accélère ⇒ la gravitation ⇒ plus on subit la gravitation plus on est jeune !! (la gravitation ralentit l'horloge).

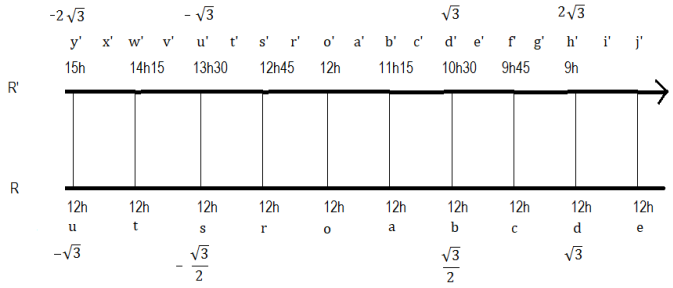
Ceci explique pourquoi P' est plus jeune, même si P' a subi quelques secondes d'accélération, mais quelques secondes pour P' ça peut être l'éternité pour P !!!

Pour bien comprendre on va regarder sur un exemple.

On prend $V=c\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \gamma=2$, et pour simplifier les calculs on prend c=1 comme unité. Dans R tous les horloges sont synchronisés, de même dans R', mais les horloges de R et de R' ne sont pas synchronisées.

La transformation de Lorentz

$$\begin{cases} t' = 2t - \sqrt{3}x \\ x' = -\sqrt{3}t + 2x \end{cases}$$



Un habitant du monde R, il s'appelle b et habite à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ km de la garre o . à midi=12h il rencontre un habitant de R' monsieur d' son horloge indique 10h30 et d', habite à $\sqrt{3}$ km de la garre o', ils se font un 'coucou' et serrent la main

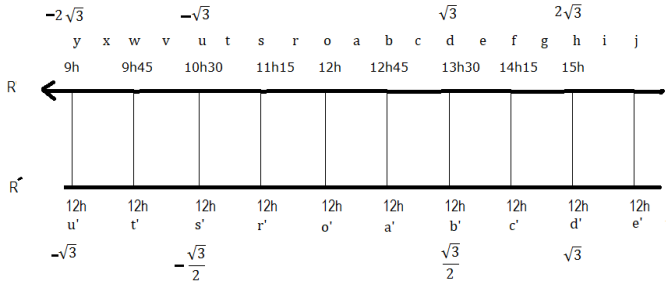
A : b serre la main d'

Pendant ce temps un autre habitant r de R serre aussi la main de s' un habitant de R'.

B : r serre la main s'

Tous ces événements A , B sont simultanés pour P, tout se passe à 12h dans R

Voyons ce qui se passe à 12h dans le monde de R'.



Dans le monde R', à midi=12h , d' a serré la main de h son horloge indique 15h

A' : d' serre la main h

pendant ce temps s' dans R' serre aussi la main de u un habitant de R

B' : s' serre la main u

Les événements A' , B' sont simultanés pour P' ils se passent à 12h dans R'

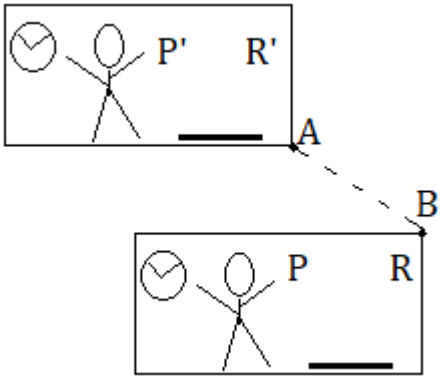
Donc ce n'est pas la même chose. Le présent de P n'est pas le même que le présent de P'. P et P' ne partagent pas le même présent !

Et puis les événements d' et b, (d',b) sont simultanés pour P mais pas pour P', ce sont des événements (d',h) qui sont simultanés pour P'.

Tous ces désaccords proviennent de la relativité de la simultanéités des événements. Deux événements peuvent

être simultanés pour un observateur P mais pas forcement pour un observateur P'.

Observons le dessin ci-dessous



Si P et P' sont complètement isolé, il est impossible de savoir qui bouge. Si la distance AB ne change pas (qu'on bouge ou non) , on dit que P et P' sont fixes, par contre si la distance AB change ça signifie que P et P' sont en mouvement relatif, peu importe qui bouge.

Il y a 4 visions:

1. P' perçoit R' on notera (P',R')

2. P perçoit R' → (P,R')

3. P perçoit R → (P,R)

4. P' perçoit R → (P',R)

On va regarder seulement les cas (1) et (2) car (3), (4) sont symétriques.

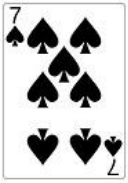
La question est donc (dans le cas de mouvement relatif) : y a -t-il une différence entre la vision de P' vers son monde R' , et la vision de P vers le monde R' ?

Avant Einstein la réponse c'est pareil il n'y a aucune différence !! mais après Einstein il y a une grande différence d'autant plus marquée que la vitesse V est plus grande ...

→Newton : (P,R')=(P',R')

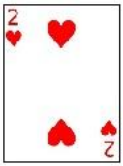
→Einstein: (P,R')≠(P',R')

(P',R') =

(P,R') = 

Pour Newton

(P',R') =

(P,R') = 

Pour Einstein

Autrement dit pour Newton, P perçoit le monde R' exactement comme P' perçoit le monde R'. Mais pour Einstein c'est différent:

P perçoit le monde R' différent que P' perçoit le monde R'.

Et alors une question qui vient immédiatement : Si P perçoit le monde R' différent, alors cette différence est-elle une réalité ? ou simplement une illusion ?

Eh bien Einstein nous dit que , ce que perçoit P pour le monde R' est une réalité, une réalité différente que P' perçoit lui-même son propre monde R'. Il y a donc simplement deux réalités différentes !!

Lorsqu'on fait de la relativité restreinte on raisonne pratiquement en newtonien ! on n'a pas la relativité restreinte dans le sang !

Par exemple, on se pose souvent la question:

Si P perçoit le monde R' différent que P' perçoit son propre monde R' alors quel est le vrai monde R' ? , la vraie réalité ?

Par exemple

P' perçoit sa règle T'=1m

alors que P perçoit T'=0,5m

et alors quelle est la vraie longueur de T' ?? c'est 1m ou 0,5m ?

Naturellement, instinctivement et presque tout le monde répond: la vraie longueur de T' c'est 1m puisque c'est la longueur au repos de T'. En répondant ainsi ça nous conduit à deux conclusions:

1. Ce que perçoit P est une illusion, T'=0,5m est une illusion ce n'est pas la réalité, la réalité c'est T=1m

2. Le référentiel (R') pour lequel la règle T' est au repos est privilège (puis qu'on a pris la mesure dans ce référentiel comme longueur de la règle)

Si vous êtes attentif tout ceci contredit la relativité restreinte !!

En effet, aucun référentiel galiléen est privilège !!! tout peut faire affaire donc il n'y a aucune raison de rejeter la valeur 0,5m !!!!

La relativité restreinte décrit le monde (en mouvement relatif) que perçoit P donc ce que perçoit P EST une REALITE ce n'est pas une illusion !!! ce que perçoit P pour

R' a autant de vérité de valeur que P' perçoit son propre monde R'.

Il faut absolument entraîner l'esprit à accepter qu'il y a deux vérités, deux réalités différentes:

- P' perçoit le monde R' (une réalité)

- P perçoit le monde R' (une autre réalité)

C'est pourquoi la phrase

" La règle T' apparaît plus courte pour P " est très mauvaise

car le mot "apparaît" donne l'impression que ce n'est pas la réalité, c'est une illusion, c'est comme si on dit :" il apparaît triste ce matin " (on n'est pas sûr qu'il soit triste).

" La règle vaut (est) 0,5m pour P " c'est une réalité elle est 0,5m. Pour le Juge fédérale il n'y a aucune raison qu'il sélection T'=1m plutôt que T'=0,50m car toutes ces deux valeurs font affaire, Mob et Linda tous les deux ont raisons telle est la relativité restreinte.

Bon on va faire un résumé :

1. L'invariance de la vitesse de la lumière c implique que la simultanéité est relative.

2. Deux événements simultanés pour un observateur P ne sont pas forcement simultanés pour un autre observateur P'. donc ça peut être

A < B ; A avant B

A = B ; A,B simultanés

A > B ; A après B

tout dépend de l'observateur.

3. Les horloges des référentiels en mouvement (relatifs) ne sont jamais synchronisées, par contre les horloges du même référentiel sont (ou peuvent être) synchronisés.

4. Le mouvement ralentit (le rythme) l'écoulement du temps, il ralentit tous les rythmes : le battement du cœur, le clignement des yeux, les pouls ....

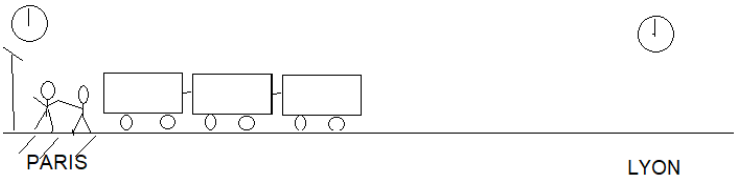
5. Chaque observateur a son propre horloge par conséquence la mesure du temps est donc différente suivant l'observateur.

6. Tout ce que perçoit un observateur (galiléen) est une réalité.

Voici un autre scénario pour nous aider à comprendre la relativité du temps.

Mob se trouve à LYON, on l'endort et le met dans le train qui va vers PARIS, on synchronise la montre de Mob avec l'horloge de la gare de LYON , il est 9h et le train part vers PARIS à la vitesse V.

à PARIS, Linda attend son ami Mob à la gare . Lorsque Mob descend du train et dit "bonjour" à Linda, il est midi=12h.



Apparemment, rien de compliqué comme situation, ça ce passe de tous les jours comme ça ....

Mais en relativité restreinte, lorsqu'on parle du temps il faut préciser par rapport à qui le temps est mesuré ? !!

- "il est midi=12h" mais par rapport à quelle horloge ?

c'est par rapport à l'horloge de la gare de PARIS ou par rapport à la montre de Mob ?

D'après le dessin c'est par rapport à l'horloge de la gare de PARIS. Mais si on jette un coup d'œil sur la montre de Mob elle est légèrement en retard !! elle indique par ex 11h54 !!

On ne peut pas expliquer ce retard simplement en disant que c'est Mob qui est en mouvement !! c'est-à-dire en s'appuyant sur le mouvement de Mob, en effet :

Le principe de réciprocité permet à Mob de raisonner ainsi:

Mob assis dans le train, pour lui c'est la gare de PARIS qui s'approche de lui , qui est en mouvement donc l'horloge de la gare est en retard, pas sa montre !!

Tous les deux sont dans des référentiels galiléens, donc tous les deux peuvent appliquer la relativité restreinte et concluent que l'horloge de l'autre est en retard.

Ça semble qu'il y a une contradiction ...

Mais si on examine le problème de plus près, il n'y a pas de contradiction. Ça résulte de la dissymétrie entre deux observateurs Linda et Mob, pour cela on va définir des événements:

- événement A: le début du voyage (quand Mob monte dans le train)

- événement B: fin du voyage (quand Mob descend du train)

Première dissymétrie : Pour mesurer le temps Mob a utilisé une seule horloge, sa montre ! alors que pour Linda, il utilise deux horloges pour mesurer le temps: une horloge à LYON pour le départ c'est-à-dire l'événement A. et une deuxième horloge à PARIS pour l'événement fin du voyage, l'événement B.

Deuxième dissymétries : Pour Linda, l'événement A et B sont produits à des centaines de km l'un de l'autre. Alors que pour Mob, A et B se produisent aux même endroit, ... à ses pieds !!!

Comme il y a de la dissymétries entre Linda et Mob leur conclusion ne peut pas être la même.

Il se trouve que la durée ou le temps qu'on mesure avec une seule horloge est plus petit que la durée ou le temps qu'on mesure avec deux horloges,

Ou encore la durée de deux événements produits au même endroit est plus petite que la durée de ces deux même événements produits aux endroits différents.

Donc la montre de Mob est en retard.

Voici un résumé important :

1) En relativité restreinte on travaille dans un espace baptisé "espace-temps". C'est un espace à 4 dimensions.

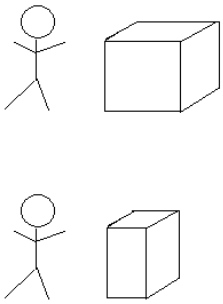
2) On se donne un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$=(R,H,T,P) et les horloges dans ce référentiel sont synchronisées.

3) Les éléments de cet espace sont nommés les événements , ces événements sont repérés par 4 paramètres (t,x,y,z).

4) La relativité restreinte décrit le monde qui s'est présenté à P, c-à-d comment le monde EST pour P.

5) P perçoit l'objet W différemment suivant que P est en mouvement ou non par rapport à W. Tout ce que perçoit P

est une réalité, donc il y a deux réalités différentes suivant que P est fixe ou en mouvement par rapport à W.



deux réalités différentes

6) P et P' perçoivent l'objet W différemment suivant qu'ils sont en mouvement ou non par rapport à W. Tout ce que perçoivent P et P' est une réalité, donc il y a deux réalités différentes si P' est fixe par rapport à W et P est en mouvement par rapport à W.

Commentaire important :

En relativité restreinte , le concept du temps est vraiment difficile à comprendre, pour éclairer ce concept on va changer les notations qui vont nous aider à mieux comprendre.

On a donc deux référentiels galiléens :

$\mathfrak{R}_1=(R_1,H_1,T_1,P_1)$

$\mathfrak{R}_2=(R_2,H_2,T_2,P_2)$

P_1 ainsi que les habitants du monde $\mathfrak{R}_1$ vivent normalement ...

de même P_2 ainsi que les habitants du monde $\mathfrak{R}_2$ vivent normalement ...

Avant Einstein on a : les horloges H_1 et H_2 sont synchronisées, càd les temps θ_1 , θ_2 sont les même

$\theta_1 = \theta_2$, le temps est universel

Après Einstein on a : les horloges H_1 et H_2 ne sont jamais synchronisées !! les temps θ_1 , θ_2 sont différents

$\theta_1 \neq \theta_2$, le temps n'est plus universel, chaque monde a son temps, autrement dit P_1 et P_2 ne partagent pas le même présent, le présent de P_1 est différent du présent de P_2 .

Et voilà ce que dit la relativité restreinte.

Maintenant (comme θ_1 est différent de θ_2) , si P_1 veut comparer son temps θ_1 avec le temps θ_2 de P_2 , la différence se résume par la formule :

$\theta_1 = \gamma_2\theta_2$ (¤)
où

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{2/1}^2}{c^2}}} \; ; \; \gamma_2 > 1$$

$V_{2/1}$ = vitesse de R_2 par rapport à R_1 (ou P_2 par rapport à P_1)

La relation (¤) montre que P_1 et P_2 ne jouent pas le même rôle, on voit que c'est P_1 qui compare (pas de γ devant θ_1) par définition on dit que l'observateur P_1 est actif et donc P_2 est passif. Le monde s'est présenté à P_1.

→Souvent on associe entre la vieillissement (cheveux blanches, rides, ..) avec l'âge (θ). Alors que la veillessement physique dépend des espèces ! par ex un extra-terrestre 150 ans ($\theta_1 = 150$) n'a pas forcément des cheveux blanches ou des rides !!

→Comme $\theta_1 \neq \theta_2$ le présent de P_1 est différent du présent de P_2 , donc P_1 et P_2 ne peuvent pas échanger du regard (regarder les yeux dans les yeux).

Les exemples d'un observateur P_1 s'assoit devant la gare et un observateur P_2 se met devant un fenêtre d'un train venant de gauche à droite de P1 , ne sont pas corrects, en effet dans ce cas lors que le train passe devant la gare , P_1 et P_2 échangent du regard !! donc à ce moment-là P_1 et P_2 ont le même présent, $\theta_1 = \theta_2$ ce qui est interdit en relativité restreinte !

→Si c'est P_2 qui veut comparer son temps θ_2 avec θ_1 alors il va trouver :

$\theta_2 = \gamma_1 \theta_1$ (¤¤)

où

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{1/2}^2}{c^2}}} \; ; \; \gamma_1 > 1$$

$V_{1/2}$ = vitesse de R_1 par rapport à R_2 (ou de P_1 par rapport à P_2)

il se trouve que

$\gamma_1 = \gamma_2$

car

$V_{1/2} = -V_{2/1}$

ce qui fait

$\theta_2 = \gamma_2\theta_1$; c'est P_2 qui est l'observateur actif (pas de γ devant θ_2) le monde s'est présenté à P_2.

On a bien la réciprocité, P_2 perçoit le monde exactement come P_1 le perçoit .

→La donné de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ ne dit pas qui bouge !! c'est seulement quand l'un des observateurs P_1 ou P_2 décide de comparer les temps càd l'un de ces observateurs devient actif c'est seulement en ce moment-là on parle du mouvement ! et la différence entre les temps θ_1 et θ_2 dépend un paramètre nommé la vitesse relative de R_1 et R_2 .

→Quand P_1 voit P_2 a 14 ans, et est entrain de courir.

présent(P_1) = "P_2 a 14 ans, et est entrain de courir"

le présent de P_2 ne contient sûrement pas la scène "P_2 a 14 ans, et est entrain de courir" cette scène est soit dans le passé soit dans l'avenir de P_2 sinon on aura

présent(P_1) = présent(P_2) ce qui est interdit en relativité restreinte.

P_1 ne sait pas et ne saura jamais ce que c'est le présent de P_2 et inversement !

Par ex:

P_1 assis devant la gare et a 70 ans.

Il regarde un train roulant à toute vitesse de gauche à droite et quand le train passe devant la gare, il voit P_2 un garçon de 14 ans.

Et par hasard P_2 regarde par la fenêtre et voit P_1 (les regards se croisent), alors il y a un paradoxe car d'après la réciprocité P_2 doit voit P_1 a 14 ans !!

Alors P_1 a 14 ou 70 ans ? !!

C'est un mauvais exemple car au moment des échanges des regards, P_1 et P_2 partagent le même présent ($\theta_1=\theta_2$)

ce qui est impossible en relativité restreinte !!

4 RAPPEL, NOTATION ET CONVENTION

On adopte les notations et les conventions suivantes:

1. La sommation
* indice-bas = indice-haut → la sommation
* indice de sommation (indice 'm'obile, indice 's'omme) ils bougent
* indice fixe = le rang, la position

$a_s b^s = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$ (convention d'Einstein)

2. Vecteur

Dans $\mathbb{R}^3$ nous avons une base orthonormée (base cartésienne) (i,j,k) donc $A^1 = A_x$, $A^2 = A_y$, $A^3 = A_z$

$A = (A^1, A^2, A^3) = (A_x , A_y , A_z)$; $A = A_x i + A_y j + A_z k$

$r = (x,y,z)$; $r = xi + yj + zk$

$A^2 = A \,.\, A = ||A||^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

3. Matrice

A^i_j , A_{ij} , A^{ij} avec $\begin{cases} i = \text{lig} \\ j = \text{col} \end{cases}$

5. Opérateur Nabla ∇

Nabla est un vecteur de $\mathbb{R}^3$

$\nabla = (\partial_x , \partial_y , \partial_z)$

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

* $\nabla f = \text{grad}(f) = (\partial_x f , \partial_y f , \partial_z f)$, gradient c'est un vecteur

* $\nabla . A = \text{div}(A) = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$, divergence c'est scalaire

* $\nabla \wedge A = \text{rot}(A) = (\partial_y A_z - \partial_z A_y , \partial_z A_x - \partial_x A_z , \partial_x A_y - \partial_y A_x)$, rotationnel, c'est un vecteur

$\nabla.(\nabla f) = (\nabla.\nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$, laplacien, scalaire

<u>Quelques formules</u> :

$\text{rot grad}(f) = \nabla \wedge (\nabla f) = (\nabla \wedge \nabla) f = 0$

$\text{div rot}(A) = \nabla.(\nabla \wedge A) = (\nabla \wedge A).\nabla = (\nabla \wedge \nabla).A = 0$

$\text{div grad}(f) = \nabla.(\nabla f) = (\nabla.\nabla)f = \Delta f$

$\text{rot rot}(A) = \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla(\nabla.A) - (\nabla.\nabla)A = \nabla(\nabla.A) - \Delta A$

$\text{grad}(A.B) = \nabla(A.B) = (\nabla.A)B + (\nabla.B)A + A \wedge (\nabla \wedge B) + B \wedge (\nabla \wedge A)$

$\text{div}(A \wedge B) = \nabla.(A \wedge B) = (\nabla \wedge A).B - (\nabla \wedge B).A$

L^i_j la matrice de Lorentz (Hendrik) et $\ell^i_j = (L^i_j)^{-1}$ l'inverse de L^i_j

$$L^i_j = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell^{i}_{j} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\beta = \frac{V}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, $V=V_{R'/R}$ vitesse du repère R' par rapport à R

<u>La transformation de Lorentz</u>

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$x'^0 = ct'$, $x'^1 = x'$, $x'^2 = y'$, $x'^3 = z'$

$$x'(x): \begin{cases} x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x'^1 = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

le système inverse

$$x(x'): \begin{cases} x^0 = \gamma x'^0 + \gamma\beta x'^1 \\ x^1 = \gamma\beta x'^0 + \gamma x'^1 \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{cases}$$

4.1 LES TENSEURS, QUADRIVECTEURS

Soit $x'^{u}(x^{i})$ une transformation quelconque qui permet de passer de R à R' (donc on passe de R' à R par $x^{i}(x'^{u})$ l'inverse de $x'^{u}(x^{i})$) .

$$R \xrightarrow{x'(x)} R'$$

$$R' \xrightarrow{x(x')} R$$

Une grandeur physique $\underline{A}$, représentée dans le repère R par une famille de nombres $A_{ij}{}^{k}$, cette même grandeur représentée dans un autre repère R' par une autre famille de nombres $A'_{uv}{}^{w}$. On dit que $\underline{A}$ est un tenseur si $A_{ij}{}^{k}$ et $A'_{uv}{}^{w}$ sont reliés par la formule :

$$(4.1.1)\quad A'_{uv}{}^{w} = \frac{\partial x'^{w}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{v}} A_{ij}{}^{k}$$

ou la formule

$$(4.1.2)\quad A_{ij}{}^{k} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{w}} \frac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{v}}{\partial x^{j}} A'_{uv}{}^{w}$$

Par abus de langage on dira que $A_{ij}{}^{k}$ est un tenseur au lieu de $\underline{A}$ est un tenseur . On dit que $A_{ij}{}^{k}$ s'est transformé en $A'_{uv}{}^{w}$ tensoriellement ou suivant la loi tensorielle.

Remarque important : $x'^{u}(x^{i})$, $x^{i}(x'^{u})$, $A_{ij}{}^{k}$, $A'_{uv}{}^{w}$ sont des 4 données du problème. On doit prouver la relation (4.1.1) ou (4.1.2) ci-dessus pour montrer que $A_{ij}{}^{k}$ est un tenseur.

On dit que le tenseur $A_{ij}{}^{k}$ est d'ordre 3 (3 indices) et de type $\binom{1}{2}$ 1-contravariant (indice k) et 2-covariant (indice ij), de même un vecteur covariant A_i est un tenseur d'ordre 1 et de type $\binom{0}{1}$ etc ...

Tenseur restreint

Lorsque la transformation $x'^{u}(x^{i})$ est la transformation de Lorentz L^{u}_{i} , on dira que $A_{ij}{}^{k}$ est un tenseur restreint .

NOTE : Pour le calcul tensoriel vous pouvez consulter le livre "La relativité générale" dans la même collection.

Quadrivecteur (quadri)

Un quadrivecteur est simplement un tenseur restreinte du type $\binom{1}{0}$ ou $\binom{0}{1}$.

Autrement dit si $x'^{u}(x^{i})$ est la transformation de Lorentz L^{u}_{i} qui fait de passer de R à R' (donc on passe de R' à R par ℓ^{i}_{u} l'inverse de L^{u}_{i}) .

$$R \xrightarrow{L} R'$$

$$R' \xrightarrow{\ell} R$$

Une grandeur physique A , représentée dans le repère R par un 4-applet A^{i} , cette même grandeur représentée dans un autre repère R' par un autre 4-applet A'^{u} . On dit que A est un quadrivecteur si A^{i} et A'^{u} sont reliés par la formule :

$$(4.1.3) \quad A'^{u} = L^{u}_{i} A^{i}$$

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(-\beta A^0 + A^1) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases}$$

ou la formule

(4.1.4) $A^i = \ell^i_u A'^u$

$$\begin{cases} A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1) \\ A^1 = \gamma(\beta A'^0 + A'^1) \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases}$$

Par abus de langage on dira que A^i est un quadrivecteur au lieu de $\underline{A}$ est un quadrivecteur . On dit que A^i s'est transformé en A'^u comme une lorentzienne, ou suivant la loi lorentzienne.

Remarque important : L^u_i , ℓ^i_u , A^i , A'^u sont des 4 données du problème. On doit prouver la relation (4.1.3) ou (4.1.4) ci-dessus pour montrer que A^i est un quadrivecteur.

Pour les indices en bas , la loi de transformation est:

$A'_u = \ell^i_u A_i$

$A_i = L^u_i A'_u$

Résumer

$$\begin{cases} A'^{u} = L^{u}_{i} A^{i} \;\; ; \; A'^{u} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A^{i} \, , L^{u}_{i} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} \\ A^{i} = \ell^{i}_{u} A'^{u} \;\; ; \; A^{i} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A'^{u} \, , \ell^{i}_{u} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \end{cases}$$

Pour les indices bas

$$\begin{cases} A'_{u} = \ell^{i}_{u} A_{i} \;\; ; \; A'_{u} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} A_{i} \, , \ell^{i}_{u} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x'^{u}} \\ A_{i} = L^{u}_{i} \, A'_{u} \;\; ; \;\; A_{i} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} A'_{u} \, , L^{u}_{i} = \dfrac{\partial x'^{u}}{\partial x^{i}} \end{cases}$$

Les L^{u}_{i} , ℓ^{i}_{u} , A^{i} , A'^{u} sont le 4 données .

exemple

$x^{i} = (x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3})$ est un quadrivecteur car les x'^{u} sont reliés avec x^{i} (par définition même de x^{i}) par

$$x'^{u} = L^{u}_{i} x^{i}$$

Comme il n'est pas pratique de montrer quelqu'un est un quadrivecteur, on utilise souvent des règles de fabrications des quadrivecteurs à partir des quadrivecteurs connus.

1. A^{i} , B^{i} quadri (quadrivecteur) $\Rightarrow A^{i} \pm B^{i}$ quadri.

2. A^{i} quadri , α=scalaire invariant $\Rightarrow \alpha A^{i}$ quadri

3. A^{i} quadri , $\Rightarrow \dfrac{dA^{i}}{d\tau}$ quadri ; τ=temps propre

4.2 L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

On pose $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ et on va définir une forme quadratique ds^2 sur $\mathcal{V}$:

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$ds^2 = \eta_{ij}\, dx^i dx^j$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \eta = \text{êta}$$

$diag(\eta_{ij}) = (1,-1,-1,-1)$; $dét(\eta_{ij}) = \eta$

$\eta^{ij} = \left(\eta_{ij}\right)^{-1} = \eta_{ij}$

ds^2 = la métrique de $\mathcal{V}$

η_{ij} = tenseur métrique de $\mathcal{V}$

Le couple $(\mathcal{V},\eta_{ij})$ ou $(\mathcal{V},ds^2)$ s'appelle espace-temps de Minkowski .

Soit

$A^i = (A^0, A^i, A^2, A^3)$ un quadrivecteur

on pose :

$A^i = (A^0, A)$

$A = (A^1,A^2,A^3) = (A_x , A_y , A_z)$; $A = A_x i + A_y j + A_z k$

$(A^i)^2 = \eta_{ij} A^i A^j$

$(A^i)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$

Et puis le produit scalaire

$A^i . B^j = \eta_{ij} A^i B^j = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$

Le produit scalaire de deux quadri est un invariant relativiste, en effet :

$A'^i . B'^j = A'^0B'^0 - A'^1B'^1 - A'^2B'^2 - A'^3B'^3$

$= \gamma(A^0 - \beta A^1)\gamma(B^0 - \beta B^1) - \gamma(-\beta A^0 + A^1)\gamma(-\beta B^0 + B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$

$= \gamma^2(A^0B^0 - \beta A^0B^1 - \beta A^1B^0+\beta^2 A^1B^1) - \gamma^2(\beta^2 A^0B^0 - \beta A^0B^1 - \beta A^1B^0+A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$

$= \gamma^2(A^0B^0 - \beta A^0B^1 - \beta A^1B^0+\beta^2 A^1B^1 -\beta^2 A^0B^0 + \beta A^0B^1 + \beta A^1B^0 - A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$

$= \gamma^2(A^0B^0 +\beta^2 A^1B^1 -\beta^2 A^0B^0 - A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$

$= \gamma^2(1-\beta^2)(A^0B^0 - A^1B^1) - A^2B^2 - A^3B^3$

$= A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = A^i . B^j$

Pour monter et descendre les indices on utilisera η_{ij} , η^{ij}

$A_i = \eta_{ij} A^j$

$A^i = \eta^{ij} A_j$

* $A^i = (A^0, A) \Rightarrow A_i = (A^0,-A) = (A^0,-A^1,-A^2,-A^3)$

* $A_i = (A_0, A) \Rightarrow A^i = (A_0,-A) = (A_0,-A_1,-A_2,-A_3)$

La règle de monter/descendre des indices dans $(\mathcal{V}, \eta_{ij})$ est assez simple.

¤ Monter/descendre l'indice 0 ne change pas

¤ Monter/descendre l'indice 1,2,3 change en opposé

exemple

$A_{00} = A^{00}$, $A_{01} = - A^{01}$, $A_{11} = (-)(-) A^{11}$

$A^0{}_0 = A^{00}$, $A_0{}^1 = A^{01}$, $A^0{}_1 = -A^{01}$, $A^{11} = -A^1{}_1$

.....

$A^i . B^j = A^iB_i = A_iB^i$

$= A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$

$= A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3$

<u>La "norme" au carré de A^i</u>

$A^i . A^i = (A^i)^2 = A^{i2} = ||A^i||^2 = (A^0)^2 - A^2$

La norme de $||A^i||^2$ est un invariant relativiste .

L'espace $\mathcal{V}$ n'est pas un espace euclidien puisque les termes carrés, les η_{ij} ne sont pas tous strictement positifs (ce n'est pas une forme positive) . On dit que $\mathcal{V}$ est un espace sur-euclidien c'est un espace plat.

Note : Un quadrivecteur est un élément particulier de l'espace de Minkowski $\mathcal{V}$. Ces éléments se transforment suivant la loi lorentzienne.
Il faut distinguer le rôle de η_{ij} et la matrice de Lorentz L^i_j

* η_{ij} joue le rôle de la métrique de $\mathcal{V}$, qui donne les propriétés géométriques de $\mathcal{V}$ (plat, sur-euclidien ...)

* Quant à L^i_j c'est une transformation qui permet de changer les repères (les référentiels) de voir le comportement des repères, des éléments de $\mathcal{V}$ quand on passe d'un repère à un autre.

4.3 LES QUADRIVECTEURS USUELS

1. le quadri position

On pose:

$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, r)$; $r = (x,y,z)$

c'est par définition même que x^i est un quadrivecteur

$(x^i)^2 = x^i . x^i = ||x^i||^2 = s^2$

2. le quadri dx^i

$dx^i = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz) = (cdt, dr)$;
$dr = (dx,dy,dz)$

est aussi un quadrivecteur (dans beaucoup de livres ils disent que c'est la différence entre deux quadrivecteurs , mais ils ne disent pas lesquels ? c'est comme si c'est un secret d'état !!... c'est idiote comme d'explication ! dans ce cas ne donne pas d'explication, dites simplement que c'est un quadrivecteur c'est tout !! et on se débrouille pour savoir pourquoi.)

en fait dx^i est un quadrivecteur parce que on a la formule :

$f(x^0,x^1,x^2,x^3)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$$

il suffit d'appliquer la formule à la fonction $x^i(x'^k)$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

dx^i s'est bien transformé en dx'^k suivant la loi Lorentzienne

<u>3. quadri-nabla</u> :

$$\partial_i = (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\frac{1}{c}\partial_t, \nabla) \ ; \nabla=(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial x'^i} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^i} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^i}$$

$$\partial'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\,\partial_j$$

$$\partial'_i = \ell^j_i\,\partial_j$$

∂_i est bien un quadrivecteur (covariant)

$\partial_i = (\frac{1}{c}\partial_t\,, \nabla)$

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\partial^i = \eta^{ij}\,\partial_j$

$\partial^i = (\frac{1}{c}\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z) = (\frac{1}{c}\partial_t\,, -\nabla)$

$(\partial_i)^2 = \partial_i\,\partial^i = ||\partial_i||^2 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta = -\square$

ce qui montre l'opérateur d'Alembertien $\square$ est invariant par la transformation de Lorentz.

<u>4. le quadri-vitesse</u>

$dt = \gamma d\tau$

$ds = c\,d\tau$

$$\frac{dx}{dt} = v_x\,;\ \frac{dy}{dt} = v_y\,;\ \frac{dxz}{dt} = v_z$$

quadrivecteur vitesse u^i :

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}\ ;\ \tau = \text{temps propre}$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^i}{dt}$$

$u^i = (\gamma c, \gamma v) = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$ = quadri-vitesse

Remarque : $\frac{dx^i}{dt}$ n'est pas un quadrivecteur et γ n'est pas un invariant mais l'ensemble $(\gamma\frac{dx^i}{dt})$ ils forment un quadrivecteur.

$u^i u_i = u^0u_0 + u^1u_1 + u^2u_2 + u^3u_3$

$(u^i)^2 = u^i . u^i = ||u^i||^2 = \gamma^2c^2 - \gamma^2u^2 = \gamma^2c^2(1 - v^2/c^2) = c^2$

5. le quadri-impulsion

$p^i = m\,u^i$ quadrivecteur impulsion, pour une particule de masse non nul. Pour un photon

$$p^i = (\frac{E}{c}, \frac{E}{c}\ell)$$

ℓ = vecteur unitaire suivant la direction de propagation.

et $E = h\nu$; h=constante Planck, ν=fréquence

$p^i = mu^i = (m\gamma c, m\gamma v) = (E/c, p)$

$p^i = (E/c, p)$ quadri-impulsion

Pour un photon: $p^i = (\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\ell)$ quadri-impulsion

calculons pour une particule de masse non nulle

$p^ip_i = p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3$

$p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2$

$(p^i)^2 = p^i . p^i = ||p^i||^2 = p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

$(p^i)^2 = p^i . p^i = ||p^i||^2 = m^2 ||u^i||^2 = m^2 c^2$

En relativité restreinte, la masse m≥0 est définie par cette expression :

$$\frac{\|p^i\|^2}{c^2} = m^2$$

qui est un invariant puisque $\|p^i\|^2$ et c^2 sont des invariants en effet:

$(m'^2 = m^2) \Longrightarrow (m'-m)(m'+m)=0 \Longrightarrow m'=m.$

Rappel: En relativité restreinte la masse m (m≥0) est une propriété intrinsèque de la particule, comme la charge q, donc une invariante relativiste.

6. le quadri-force

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} \quad ; \text{quadri} - \text{force}$$

Voyons que vaut ce quadri.

$dt = \gamma d\tau$

$ds = cd\tau$

$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i$$

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^i}{dt}$$

$$\gamma\frac{dp^i}{dt} = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma f\right)$$

$$f^i = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma f\right) \text{ ; quadri} - \text{force}$$

$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

En dérivant cette égalité par rapport à t on trouve

$$E\frac{dE}{dt} = c^2\, p.\frac{dp}{dt} = c^2\gamma mv.f$$

$$\frac{dE}{dt} = v.f = \mathcal{P} \text{ (puissance de la force f)}$$

$$f^i = \left(\frac{\gamma}{c}\mathcal{P}, \gamma f\right)$$

<u>Résumons</u> :

1. quadri-position $x^i = (ct, r)$; $x_i = (ct, -r)$; $||x^i||^2 = s^2$

2. quadri-vitesse $u^i = (\gamma c, \gamma v)$; $u_i = (\gamma c, -\gamma v)$; $||u^i||^2 = c^2$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \text{ ; } u = \frac{dx_i}{d\tau}$$

3. quadri-impulsion $p^i = (E/c, p)$; $p_i = (E/c, -p)$

$||p^i||^2 = m^2c^2$

$p^i = mu^i$, $p_i = mu_i$

4. quadri-force $f^i = (\frac{\gamma}{c}\mathcal{P}, \gamma f)$; $f_i = (\frac{\gamma}{c}\mathcal{P}, -\gamma f)$;

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} \; ; \; f_i = \frac{dp_i}{d\tau}$$

5. quadri-courant $j^i = (\rho c, j)$ avec

$j^i \stackrel{def}{=} \rho_0 u^i$

ρ_0 = distribution de charge propre

ρ = distribution de charge (mobile par rapport à R, observateur)

$\rho = \gamma\rho_0$

$j = \rho v$

$$j^i = \left(\rho_0\gamma c, \rho_0\gamma v_x, \rho_0\gamma v_y, \rho_0\gamma v_z\right) = \left(\rho c, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z\right)$$

6. quadri-d'onde $k^i = (\frac{\omega}{c}, k)$ avec

ω=pulsation, $k=\frac{\omega}{c}\ell$, ℓ=vecteur unitaire suivant la direction de propagation

7. $\partial_i = (\frac{1}{c}\partial_t , \nabla)$ quadri-nabla $||\partial_i||^2 = -\Box$

4.4 L'INTERVALLE

Un événement c'est-à-dire quelque chose qui passe, quelque chose qui s'est produit, est repéré par un 4-uplet (ct,x,y,z)

On pose

$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

pour simplifier on se place dans un plan c'est-à-dire prend $y = z = 0$

$s^2 = c^2t^2 - x^2$

Par définition s^2 se nomme l'intervalle (entre deux événements)

Attention !! s^2 c'est simplement une notation, s^2 peut être positif, négatif ou nul.

Dans R', on aura

$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2$

On va montrer que

$s^2 = s'^2$

Démonstration

L'égalité

$s^2 = s'^2$

signifie que l'intervalle est invariant, donc toute transformation qui fait passer de R à R' doit laisser l'intervalle invariant.

On cherche une relation entre s^2 et s'^2 , on ne va pas casser la tête et compliquer la vie , on cherche la relation du type

$s^2 = ks'^2$

Si on trouve tant mieux sinon on se débrouillera autrement !!!!

Voyons ce k, normalement il doit être en fonction de O' (x=coordonnée), du t=temps et de la direction de la vitesse de R' par rapport à R, k(O',V,t)

* Comme l'espace est homogène , n'importe quel O' convient, donc k ne dépend pas de O'

* Comme l'espace est isotope , n'importe quelle direction convient, donc k ne dépend pas de direction de la vitesse

* Comme le temps est homogène , n'importe quel moment t convient, donc k ne dépend pas t

finalement k dépend seulement le module V de la vitesse

d'où

$s^2 = k(V)\, s'^2$

Considérons maintenant trois référentiels R, R', R" et les modules des vitesses correspondantes : $V=V_{R'/R}$, $T=V_{R"/R}$, $Q=V_{R"/R'}$

$s^2 = k(V)\, s'^2$

$s^2 = k(T)\, s''^2$

$s'^2 = k(Q)\, s''^2$

ce qui donne

$$1 = \frac{k(V)}{k(T)} \frac{s'^2}{s''^2}$$

$$\frac{k(T)}{k(V)} = \frac{s'^2}{s''^2}$$

$$\frac{k(T)}{k(V)} = k(Q)$$

le membre de droite de cette égalité le k dépend de V, T et aussi l'angle θ entre V et T , $\theta = \widehat{(V, T)}$, Q=T - V

mais le membre de gauche ne dépend pas de θ donc k(V)=k=constant

finalement

k/k = k

k=1

on a bien

$s^2 = s'^2$

Note : Donc toute transformation qui fait passer de R à R' doit laisser l'intervalle invariant .

La transformation de Lorentz vérifie bien cette propriété, en effet

* L'invariance de l'intervalle par la transformation de Lorentz.

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases} \Rightarrow$$

$c^2t'^2 = \gamma^2c^2t^2 - 2\gamma^2ct\beta x + \gamma^2\beta^2x^2$

$x'^2 = \gamma^2\beta^2c^2t^2 - 2\gamma^2\beta ctx + \gamma^2x^2$

$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2c^2t^2 - 2\gamma^2ct\beta x + \gamma^2\beta^2x^2 - \gamma^2\beta^2c^2t^2 + 2\gamma^2\beta ctx - \gamma^2x^2$

$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2c^2t^2 + \gamma^2\beta^2x^2 - \gamma^2\beta^2c^2t^2 - \gamma^2x^2$

$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2c^2t^2 (1-\beta^2) - \gamma^2x^2(1-\beta^2)$

$c^2t'^2 - x'^2 = (c^2t^2 - x^2)\gamma^2(1-\beta^2)$

$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$

On a bien l'invariance de l'intervalle.

Ce qui montre la transformation de Lorentz est un bon candidat.

<u>Quelques vocabulaires</u>

¤ Si $s^2 > 0$ on dit que l'intervalle est du genre temps

¤ Si $s^2 = 0$ on dit que l'intervalle est du genre lumière

¤ Si $s^2 < 0$ on dit que l'intervalle est du genre espace.

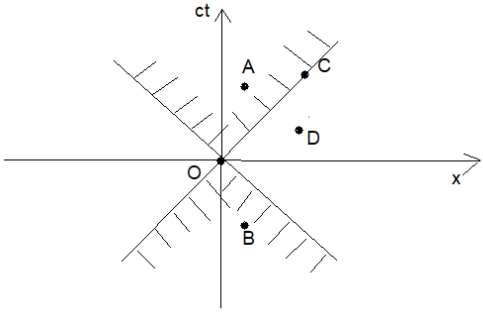
Le cône de la lumière

On a $s^2 = c^2t^2 - x^2$

Par définition le cône de la lumière de O (origine) se sont des événements tels que $s^2=0$ c'est-à-dire

$c^2t^2 - x^2 = 0 \Rightarrow ct = \pm x$

quand $s^2>0$ et $t>0$ l'événement est au dessus et à l'intérieur de la cône (A)
quand $s^2>0$ et $t<0$ l'événement est au dessous et à l'intérieur de la cône (B)
quand $s^2=0$ l'événement est sur les droites $ct=\pm x$ (C)
quand $s^2<0$ l'événement est à l'extérieur de la cône (D)



* Conservation la causalité

Soient deux événement A et B, on dit que A peut être "la cause" de B et on le note A⊢B si , par définition:

$$(t_B - t_A) > \frac{(x_B - x_A)}{c}$$

Autrement dit, la durée entre ces deux événements doit être suffisamment grande pour que la lumière aie le temps pour aller de A à B.

La causalité est conservée ça signifie que dans R' on aura aussi:

$$(t_B^{'} - t_A^{'}) > \frac{x_B^{'} - x_A^{'}}{c}$$

Allons y, il suffit d'appliquer la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct^{'} = \gamma(ct - \beta x) \\ x^{'} = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct_B^{'} = \gamma(ct_B - \beta x_B) \\ x_B^{'} = \gamma(-\beta ct_B + x_B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ct_B^{'} = \gamma(ct_B - \beta x_B) \\ ct_A^{'} = \gamma(ct_A - \beta x_A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_B^{'} - t_A^{'} = \gamma[(t_B - t_A) - \beta\frac{(x_B - x_A)}{c}]$$

$$\begin{cases} x_B^{'} = \gamma(-\beta ct_B + x_B) \\ x_A^{'} = \gamma(-\beta ct_A + x_A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_B^{'} - x_A^{'}}{c} = \gamma[-\beta(t_B - t_A) + \frac{(x_B - x_A)}{c}]$$

$$\Rightarrow (t_B^{'} - t_A^{'}) - \frac{x_B^{'} - x_A^{'}}{c}$$
$$= \gamma[(1 + \beta)(t_B - t_A) - (1 + \beta)\frac{(x_B - x_A)}{c}]$$

$$\Rightarrow (t_B^{'} - t_A^{'}) - \frac{x_B^{'} - x_A^{'}}{c} = \gamma(1 + \beta)[(t_B - t_A) - \frac{(x_B - x_A)}{c}]$$

Comme $\gamma(1+\beta)>0$ donc si

$$(t_B - t_A) > \frac{(x_B - x_A)}{c} \Rightarrow (t'_B - t'_A) > \frac{x'_B - x'_A}{c}$$

Autrement dit si dans R on a:

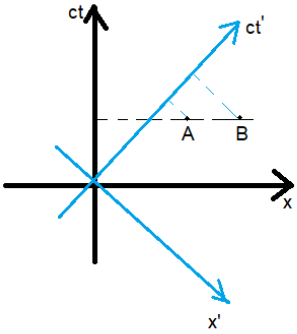
A ⊢ B ; A peut être la cause de B

alors on aura dans R'

A' ⊢ B' ; A' peut être la cause de B'

On aura jamais par exemple B' ⊢ A' dans un autre référentiel R', la causalité est conservée est donc une bonne chose.

Attention !! mais l'ordre chronologique peut être changé !!
par ex dans R on a: A < B ; A s'est produit avant B
Mais dans R' peut être : B < A , B s'est produit avant A ou bien A = B, A et B se sont produits en même temps (simultanément)



Dans R: A=B, dans R': A<B

L'invariant de l'intervalle montre que la relativité restreinte respecte la "causalité" en effet

$$S^2 > 0 \Rightarrow \frac{S^2}{c^2} > 0 \Rightarrow (t_B - t_A)^2 - \frac{(x_B - x_A)^2}{c^2} > 0$$

$$\Rightarrow (t_B - t_A)^2 > \frac{(x_B - x_A)^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow |t_B - t_A| > \frac{|x_B - x_A|}{c}$$

donc

$$S'^2 > 0 \Rightarrow \frac{S'^2}{c^2} > 0 \Rightarrow (t'_B - t'_A)^2 - \frac{(x'_B - x'_A)^2}{c^2} > 0$$

$$\Rightarrow (t'_B - t'_A)^2 > \frac{(x'_B - x'_A)^2}{c^2} > 0$$

$$\Rightarrow |t'_B - t'_A| > \frac{|x'_B - x'_A|}{c}$$

5 DYNAMIQUE RELATIVISTE

A une particule (ou un système) on associe une quantité S nommée action, l'expérience montre que l'action a une forme d'intégrale :

$$S = \int_a^b L(x, v)dt$$

La fonction L(x,v) à deux paramètres (2 variables) x=position, v=vitesse est appelée le lagrangien

Par définition

l' énergie est

$$E \stackrel{def}{=} v\frac{\partial L}{\partial v} - L$$

et l'impulsion est

$$p \stackrel{def}{=} \frac{\partial L}{\partial v}$$

S est une sorte de patrimoine de la particule

Le principe de moindre action :

$$S = \int_a^b L(x, v)dt$$

Pour passer de l'état a à l'état b, la particule dépend le moindre action possible c'est-à-dire δS=0 et l'intégrale est nulle sur les bornes d'intégration.

Note : l'opérateur de variation δ se comporte comme l'opérateur différentiel d, et de plus ils se commutent δd=dδ

5.1 L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Le principe de moindre action nous permet de trouver l'équation du mouvement, dans δS=0 on fait varier x: δx et que l'intégrale sur les bornes a,b est nulle (δx(a)=δx(b)=0)

$$\delta S = \int_a^b \delta L \, dt$$

$$\delta S = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\delta v\right) dt$$

Le 1er morceau de la somme on a déjà δx, dans le 2ème morceau on a δv (primitive de δx) donc on va faire une intégration par partie sur ce morceau $\frac{\partial L}{\partial v}\delta v$ (l'intégration par rapport à t)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial v} \rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v}\right) \text{ dérivée par rapport à t} \\ \delta v \rightarrow \delta x \text{ primitive par rapport à t, } \delta \text{ et } \dfrac{d}{dt} \text{ permutent} \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v}\delta v = \frac{\partial L}{\partial v}\delta x - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\delta x$$

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}\delta v\, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial v}\delta x\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\delta x\, dt$$

$$\delta S = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v}\delta x\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\delta x\, dt$$

Mais δx(b)=δx(a)=0, l'intégrale est nulle sur les bornes

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\right]\delta x\, dt$$

Cette intégrale est nulle quelque soit la variation δx donc

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

c'est l'équation du mouvement (on l'appelle aussi l'équation de Lagrange).

Autrement dit , un système est décrit par L , et l'évolution du système vérifie par l'équation de Lagrange.

Remarque

Deux lagrangiens L_1 et L reliés par la relation :

$L_1 = L + \frac{dQ}{dt}$ où Q(x) est une fonction de x(t)

Alors L_1 et L donnent la même équation du mouvement.

en effet

$$S_1 = \int_a^b L_1(x,v)dt = \int_a^b L(x,v)dt + \int_a^b \frac{dQ}{dt}dt$$
$$= S + Q[x(b)] - Q[(x(a)]$$

$\delta S_1 = \delta S + Q[\delta x(b)] - Q[\delta x(a)]$

mais $\delta x(a) = \delta x(b) = 0$ donc

$\delta S_1 = \delta S$

Note : si on est en dimension 3, Q sera en fonction de r = (x,y,z) vecteur de position, bien sûr .

La version vectorielle de l'équation de Lagrange est

$r = (x,y,z)$ et $v = (v_x, v_y, v_z)$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \left(\frac{\partial L}{v_x}, \frac{\partial L}{v_y}, \frac{\partial L}{v_z}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

Note sur les notations : il est important de savoir (dans une écriture, une formule ....) qui est vecteur, qui est scalaire, mettre des flèches sur les vecteurs c'est assez pénible ! Vous êtes assez grand maintenant, vous devriez savoir qui est vecteur, qui est scalaire. Par ex, l'équation ci-dessus est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

et en 3D, avec '.' le produit scalaire

$$E \stackrel{def}{=} \vec{v}.\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L$$

et vecteur l'impulsion

$$\vec{p} \stackrel{def}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

Voici les écritures :

p^i = quadrivecteur car il y a l'indice 'i'
p = vecteur , ou nombre tout dépend du contexte
p.q = vecteurs car '.' le produit scalaire
pq = vecteur , ou nombre tout dépend du contexte
p^2 = nombre, car pp ou p.p donne des nombres

...

Le lagrangien classique d'une particule

En générale un lagrangien dépend de 2 paramètres r,v

* L'espace étant homogène , le mouvement de la particule est le même quel que soit l'endroit où elle se trouve, donc L ne dépend pas de r, en effet

L'homogénéité signifie:

L(r+dr,v) = L(r,v)

or l'égalité du développement limité de L en dr donne

$L(r+dr,v) = L(r,v) + \frac{\partial L}{\partial r}dr$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

* L'espace est isotope , aucune direction est privilégiée donc L dépend seulement le carré du module $L(v^2)$, $||v||^2=v^2=v.v$ de la vitesse, car si L=L(||v||) en générale L(-||v||)≠L(||v||) donc L dépend de la direction de la vitesse.

* L'uniformité de temps (L(r,v,t+dt)=L(r,v,t)), implique que L ne dépend pas (directement, explicitement) du temps t, en effet

L'uniformité signifie:

$L(r,v,t+dt) = L(r,v,t)$

or l'égalité du développement limité de L en dt donne

$L(r,v,t+dt) = L(r,v,t) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

donc $L(r, v) = L(v^2)$

Voyons comment on trouve l'expression de L, Pour ça on peut remarquer que deux lagrangiens L_1 et L reliés par la relation suivante:

(5.1.1) $L_1 = L + 2\frac{dQ}{dt}$ où Q(x) est une fonction de x(t)

Alors L et L_1 donnent la même équation du mouvement.

Considérons maintenant un autre référentiel R' de vitesse u très, très petite, infiniment petite en configuration standard, dans R' on a le lagrangien L'(v') mais il doit avoir la même forme (L'=L) que dans R (principe de réciprocité) c'est-à-dire

$L'(v') = L(v'^2)$

comme v' = v+u d'où

$L(v'^2) = L((v+u)^2) = L(v^2+2v.\,u+u^2) = L_1\,(v^2)$

or un développement limité du 1er ordre en h de f(x) donne

$f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h$

donc pour $f(x) = L(v^2)$ et $h = u$ ça donne

$L((v+u)^2) - L(v^2) = [L(v^2)]'\,u$

$L((v+u)^2) - L(v^2) = 2L'(v^2)\,u.v$

$L((v+u)^2) - L(v^2) = 2\frac{dL}{dv^2}\,u.v$

$L((v+u)^2) = L(v^2) + 2\frac{dL}{dv^2}\,u.v$

$L_1(v^2) = L(v^2) + 2\frac{dL}{dv^2}\,u.v$

en comparant avec (5.1.1)

$\frac{dQ}{dt} = \frac{dL}{dv^2}\,u.v$

ceci vérifie si $\frac{dL}{dv^2} = C^{te} = \frac{1}{2}m$, en effet si on prend

$Q = \frac{1}{2}m\,u.r$

$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}m\;u.\frac{dr}{dt}$

$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}$ m u.v

finalement

$\frac{dL}{dv^2} = \frac{1}{2}m \Rightarrow L = \frac{1}{2}mv^2$

On veut retrouver la relation fondamentale de la dynamique

f = ma
on ne va pas traiter toutes les forces mais seulement les forces f qui dérivent d'un potentiel $\mathcal{U}(r,t)$, c'est-à-dire les forces du type .

$$f = -\text{grad}\,\mathcal{U} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$$

et pour les autres forces ? , bah... il n'existe pas beaucoup et puis on a assez cassé la tête comme ça !!

Une particule de masse m plongée dans un champ de potentiel $\mathcal{U}(r,t)$, son lagrangien est

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{U}(r,t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$$

$$m\frac{dv}{dt} = f$$

on retrouve f = ma

Le lagrangien relativiste d'une particule

On veut trouver L tel que S soit invariant par la transformation de Lorentz , il faut donc prendre dτ (τ=temps propre) et non dt car dτ est invariant. Le plus simple c'est prendre L=k=C^{te}

$$S = \int_a^b k\, d\tau$$

or

$dt = \gamma d\tau$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ dt$$

$$S = \int_a^b k\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ dt$$

Pour trouver k, il faut choisir L de telle sorte que quand v≪c (v est très petit devant c) on retrouve

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

Le développement limitée en zéro 0 ⇒ autour du zéro ça donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{v^4}{8c^4} + \cdots$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{v^2}{2c^2}$$

On garde le terme v^2 et on vire tout !! car le 1 ne sert à rien et les autres termes sont trop petits.

$$k\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{kv^2}{2c^2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{kv^2}{2c^2}$$

$$k = -mc^2$$

finalement

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Note important :

1) La relation $k = -mc^2$ montre que, en relativité restreinte, la masse $m \geq 0$ est une invariante relativiste . Donc pour nous la masse m est une propriété intrinsèque de la particule (comme la charge q) c'est une invariante relativiste, elle ne change pas quand on change de référentiel, comme la charge q ne change pas quand on change de référentiel.

2) Avant 2012, la masse c'est la quantité de matière contenue dans la particule, mais depuis la découverte du boson BEH en 2012 on considère que la masse c'est le résultat de l'interaction de la particule avec le champ de Higgs, une caractéristique intrinsèque de la particule.

Impulsion (relativiste)

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv$$

et son énergie (relativiste)

$$E = v.\frac{\partial L}{\partial v} - L$$

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$E = \gamma mc^2$

On pose:

$E_0 = mc^2$; énergie de masse

$E_c = (\gamma-1)mc^2$; énergie cinétique (relativiste)

On a donc l'énergie (total) :

$E = E_0 + E_c$ (énergie de masse + énergie cinétique)

On voit que l'énergie cinétique relativiste E_c donne l'énergie cinétique classique $\frac{1}{2}mv^2$ quand v est très petite devant c: $v \ll c$, en effet, on fait un développement limité d'ord 1 en v^2/c^2 de la fonction $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$

$$\gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = 1+\frac{v^2}{2c^2}$$

$$\gamma - 1 = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} - 1 = \frac{v^2}{2c^2}$$

$$(\gamma-1)mc^2 = \frac{v^2 mc^2}{2c^2} = \frac{1}{2}mv^2$$

Quant à $E_0 = mc^2$ la fameuse formule d'Einstein qu'on trouve partout, montre que la masse m est une sorte d'énergie E_0 . En mécanique newtonienne la masse et

l'énergie ce sont deux concepts différents et indépendants. Einstein a unifié ces deux concepts en une seule concept énergie.

Résumons

Einsteinien

1) Référentiel galiléen: R(ct,x,y,z)

2) Transformation de Lorentz: R(ct,x,y,z) $\Rightarrow$ R'(ct',x',y',z')

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases}$$

où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$ et $\beta = \dfrac{V}{c}$; $V = V_{R'/R}$

3) Le principe de relativité (Einstein) :

* Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens R.

* La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens R.

Caractéristiques d'une particule de masse non nulle m≠0 :

4) Énergie:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \ ; \ (\text{photon: } E = h\nu)$$

5) Impulsion:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv \quad ; (\text{photon: } p = \frac{h\nu}{c}\ell)$$

6) Loi fondamentale de la dynamique :

$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i$$

7) Puissance (théorème de l'énergie cinétique)

$\frac{dE}{dt} = f \,.\, v = \mathcal{P}$ (puissance de la force f)

8) La Gravitation (Newton):

$$f = -G\frac{Mm}{r^2}\, u \text{ (Newton)}$$

Il reste la dernière équation (8) qu'Einstein a mis 10 ans pour la remplacer, il faut passer par la relativité générale, voici l'équation de remplacement :

8') La Gravitation (Einstein):

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{ij} \text{ (Einstein)}$$

Classique	relativité restreinte
référentiel R(x,y,z)	référentiel R(ct,x,y,z)
transf galiléen	transf lorentz
coordonnés: x,y,z	coordonnés: ct, x,y,z
principe relativité	vitesse lumière c=constant
$E=\frac{1}{2}mv^2$	$E=\gamma mc^2$
p=mv	$p^i = mu^i = (m\gamma c, m\gamma v)$
f = m a	$f^i = \frac{dp^i}{d\tau}$
f.v = $\mathcal{P}$	f.v = $\mathcal{P}$
j=ρv	$j^i = \rho_0 u^i$ $= (\rho c, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)$
$f = -G\frac{Mm}{r^2}$ u (Newton)	???

5.2 LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE LIBRE

Rappel : le lagrangien (relativiste) d'une particule (libre)

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

de l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

comme

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial v} = p$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

c'est normal , (f=0) c'est une particule libre

$$\frac{dp^i}{d\tau} = m\frac{du^i}{d\tau} = 0$$

$$\frac{du^i}{d\tau} = 0$$

Rappel : $ds = cd\tau$, $dt = \gamma d\tau$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^i}{dt}$$

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{du^i}{dt} = \gamma^2\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$$

ça signifie qu' en relativité restreinte , une particule isolée garde une vitesse constante comme dans le cas newtonien.

5.3 LES FORCES

Il faut rappeler que la notion de "force" c'est un concept comme le concept d'énergie, de la masse, du temps, d'espace ... etc ...

Si on pose la question : qu'est ce que c'est une force ?

La réponse est : c'est la cause du mouvement.

En mécanique newtonienne on a une relation entre la force et l'accélération : l'accélération est reliée avec la force par

(5.3.1) $f = ma \quad (f = \frac{dp}{dt})$

Ce qu'on nomme le principe fondamentale de la dynamique (classique)

On voit parfois dans les livres, ils disent que (5.3.1)

c'est la définition de la force ! non, non, non,... pas du tout !

d'un côté on a le concept "force" et de l'autre côté on a le concept "accélération" c'est le principe fondamentale de la dynamique qui relie ces deux concepts.

La relation newtonienne :

f = ma (avec m≠0, particule de masse non nul)

ça ne va pas marcher dans la relativité restreinte pour plusieurs raisons:

1. Cette relation n'est pas invariante par la transformation de Lorentz.

2. Et puis si on prend une force constante f=C^{te}=C on aura

$$f = C = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = C$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{m}$$

$$v = \frac{C}{m}t$$

Ceci montre qu'on peut avoir une vitesse v arbitrairement grande (il suffit de prendre t=1 et C>mc) donc plus grande que la vitesse de la lumière ce qui est impossible en relativité restreinte.

Il faut donc changer la relation (5.3.1) en une autre qui soit invariante par la transformation de Lorentz, les objets qui sont invariants par la transformation de Lorentz sont des quadrivecteurs, c'est pourquoi nous avons remplacé les vecteurs par les quadrivecteurs .

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv$$

* $p^i = (E/c, p)$

$$f^i = (\frac{\gamma}{c} v.f, \gamma f)$$

et la relation (5.3.1) sera remplacé par:

$$* \quad f^i = \frac{dp^i}{d\tau}$$

Voyons comment est faite cette force, pour une particule de masse non nul m≠0, on a:

calculons

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1-\frac{v^2}{c^2})'(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v.a}{c^2}\gamma^3$$

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{d\gamma}{dt}v + m\gamma a$$

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{v.a}{c^2}\gamma^3 v + m\gamma a$$

$$f = m\frac{v.a}{c^2}\gamma^3 v + m\gamma a$$

En mécanique newtonienne la force est colinéaire avec l'accélération, en relativité restreinte ce n'est pas du tout le cas.

Résumons nous :

Pour nous (la relativité restreinte et générale) :

- La masse $m \geq 0$ est un invariant relativiste, comme la charge q.

La définition de l'énergie E et la quantité de mouvement p d'une particule

$E = \gamma mc^2$

$p = \gamma mv$

de masse non nul $m \neq 0$, mais pour une particule de masse nul m=0 comme les photons par ex, ça pose des problèmes !! Dans ce cas E=0 et p=0 or en physique quantique on sait que pour un photon de fréquence ν , son énergie vaut

$E = h\nu$

L'idée est donc d'éliminer le γm, ce qui donne

$p = \gamma mv$

$c^2 p = \gamma mc^2 v$

$c^2 p = Ev$

soit

$$p = \frac{Ev}{c^2}$$

donc pour un photon v=cℓ (ℓ=vecteur unitaire suivant la direction de propagation)

$$p = \frac{E}{c}\ell$$

$$p = \frac{h\nu}{c}\ell$$

Si non on pourrait aussi utiliser la relation

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

Montrons cette relation

$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$

$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$c^2p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$

$m^2c^4 + c^2p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 + m^2c^4 = \gamma^2 m^2 \frac{v^2}{c^2} c^4 + m^2c^4$

$= (\gamma^2\beta^2+1)m^2c^4$

$= \gamma^2 m^2 c^4 = E^2$

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

quand m=0 ça donne bien

$$p = \frac{E}{c}$$

en module et en vecteur

$$p = \frac{E}{c}\ell$$

où ℓ est un vecteur unitaire suivant la direction de propagation

L'analyse de ces deux relations ci-dessous

$$\begin{cases} p = \frac{Ev}{c^2} \\ E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \end{cases}$$

montre que :

- Une particule de masse nulle m=0 ⇒ v=c

- L'énergie et la quantité de mouvement sont liées par E = pc

Une autre chose qu'il faut noter pour les particules de masse nulle, c'est qu'on ne peut pas les choisir comme référentiel, on ne peut pas se placer sur le dos d'un photon !! en effet dans ce cas le photon est immobile par rapport à ce référentiel or un photon bouge toujours à la vitesse c par rapport à n'importe quel référentiel !

Il y a d'autre particule de masse nulle : les gluons ce sont des particules qui "collent" les quarks.

Rappel :

f . v = $\mathcal{P}$ puissance de la force f

f . l = w travail de la force f (l=déplacement)

donc la puissance est le travail par unité de temps.

Théorème de l'énergie cinétique

La variation de E est la puissance des forces

Démonstration:

on a

$E = \gamma mc^2$

$$\frac{dE}{dt} = mc^2 \frac{v.a}{c^2}\gamma^3 = \gamma^3 m\, v.a$$

d'un autre côté

$$f = m\frac{v.a}{c^2}\gamma^3 v + m\gamma a$$

$$f.v = m\frac{v.a}{c^2}\gamma^3 v^2 + m\gamma\, a.v$$

$$f.v = (\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 + 1)m\gamma\, a.v$$

$$f.v = (\beta^2\gamma^2 + 1)m\gamma\, a.v$$

$f.v = \gamma^3 m\, a.v$ d'où

$$\frac{dE}{dt} = f.v = \mathcal{P}$$

Finalement le quadri force vaut

$$f^i = \left(\frac{\gamma}{c}\mathcal{P}, \gamma f\right)$$

Pour passer dans un autre référentiel R' ça donne

$$f'^i = L^i_j f^j$$

$$\begin{cases} f'^0 = \gamma(f^0 - \beta f^1) \\ f'^1 = \gamma(-\beta f^0 + f^1) \\ f'^2 = f^2 \\ f'^3 = f^3 \end{cases}$$

On voit donc que d'une part la force f n'est pas invariante, en effet, si on prend $f_x = 0$

$f^1 = \gamma f_x$

$f_x = 0 \Rightarrow f'^1 = -\gamma\beta f^0 \Rightarrow f'_x = -\frac{\gamma}{\gamma'}\beta f^0 \neq 0$

et d'autre part le principe de la réaction n'est pas vérifié.

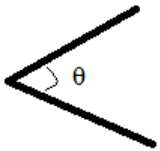
$f_1 = -f_2$ n'implique pas $f'_1 = -f'_2$

en effet si on prend f = 0 on a f ' ≠ 0

$f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow f'_1 + f'_2 \neq 0$

5.4 LES ANGLES

En physique on utilise souvent la notion d'angle. En pratique pour donner un angle θ on fait un dessin comme montre la figure ci-dessous

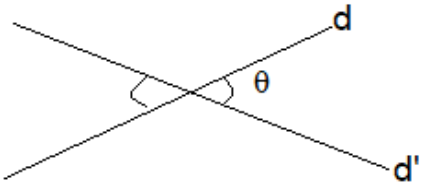


Mais imaginez si on est complètement dans le noir, ou aveugle, il faut d'écrire l'angle θ en français pour se faire comprendre ou communiquer .... ce n'est pas évident. Dans les formules où intervient des angles leur description ne sont pas toujours claires du coup on ne voit pas très bien comment former ces angles !!.

1) <u>Angle de deux droites</u>

* Deux droites d,d' non parallèles se coupent et forment ainsi 4 angles, par définition l'angle de ces deux droites est l'un des deux angles aigus θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et on note

$\theta = \{\widehat{d, d'}\} = \{\widehat{d', d}\}$



* Quand d et d' sont parallèles, par définition leur angle est nul

$d // d' \Rightarrow \theta = \{\widehat{d, d'}\} = 0$

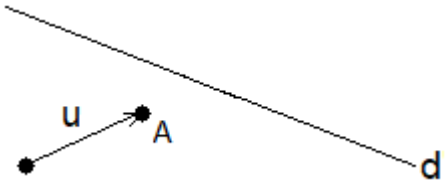
- Si d et d' sont perpendiculaires leur angle vaut $\frac{\pi}{2}$

$d \perp d' \Rightarrow \theta = \{\widehat{d, d'}\} = \frac{\pi}{2}$

En physique une direction, une ligne ... est une droite

2) <u>Angle entre un vecteur et une droite</u>

* Soient u un vecteur et une droite d non parallèles (pas la même direction) ,

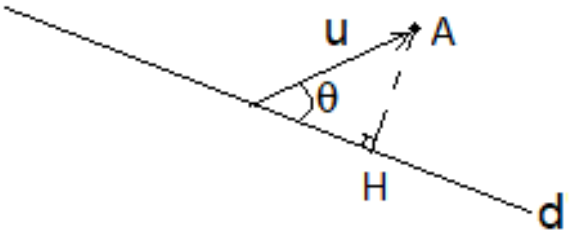


1. On déplace l'origine du vecteur u sur la droite d,

2. On projette perpendiculairement la tête A du vecteur, sur d en un point H.

L'angle du vecteur u avec d c'est l'angle qui contient le segment [AH], c'est un angle aigu θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et on note

$\theta = \{\widehat{u, d}\} = \{\widehat{d, u}\}$



* Si u et d ont la même direction, par définition leur angle est nul

$u // d \Rightarrow \theta = \{\widehat{u, d}\} = 0$

- Si u et d sont perpendiculaires leur angle vaut $\frac{\pi}{2}$

$u \perp d \Rightarrow \theta = \{\widehat{u, d}\} = \frac{\pi}{2}$

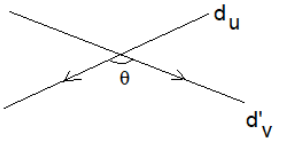
C'est comme si on a l'angle de deux droites mais ici on a un seul choix à grâce à la tête du vecteur !!

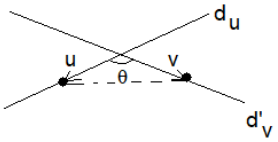
3) <u>Angle de deux axes</u>

Un axe est une droite orientée, c'est-à-dire une droite possédant un sens, donc une droite orienté ou un axe possède un vecteur directeur u.

* Deux axes d_u, d'_v non parallèles se coupent et les têtes des vecteurs directeurs u,v déterminent ainsi un angle, par définition l'angle de ces deux axes est l'angle θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ et on note

$\theta = \{\widehat{d_u, d'_v}\} = \{\widehat{d'_v, d_u}\}$





- Si d_u // d'_v même sens ⇒ θ=0

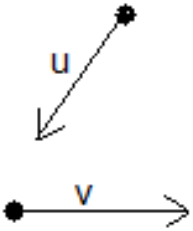
- Si d_u // d'_v sens opposé ⇒ θ=π

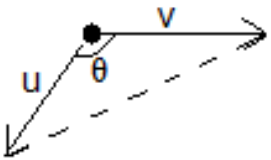
4) Angle de deux vecteurs

Soient u,v deux vecteurs, on déplace ces vecteurs pour avoir le même origine,

* Les têtes des ces vecteurs u,v forment ainsi un angles, par définition l'angle de ces deux vecteurs est l'angle θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ et on note

$\theta = \{\widehat{u, v}\} = \{\widehat{v, u}\}$





$\{\widehat{u,u}\}=0$; $\{\widehat{u,-u}\}=\pi$

$\{\widehat{-u,v}\} = \{\widehat{u,-v}\}$

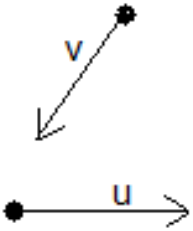
On va dire que les angles $\theta = \{\widehat{u,v}\}$ sont des angles géométriques , les angles qu'on utilise dans les triangles $0\leq\theta\leq\pi$

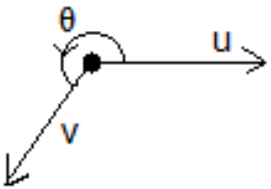
5) <u>Angle orienté de deux vecteurs</u>

Soient u,v deux vecteurs, on déplace ces vecteurs pour avoir le même origine,

* On fait une rotation d'angle θ dans le sens trigonométrique de u vers v , par définition l'angle θ est l'angle orienté des vecteurs u,v, $0\leq\theta<2\pi$ et on note

$\theta = (\widehat{u,v}) = -(\widehat{v,u})$





$(\widehat{u,u})=0$; $(\widehat{u,-u})=\pi$

$(\widehat{u,v}) = -(\widehat{v,u})$

$(\widehat{u,v})+(\widehat{v,w}) = (\widehat{u,w})$; relation de Chasles

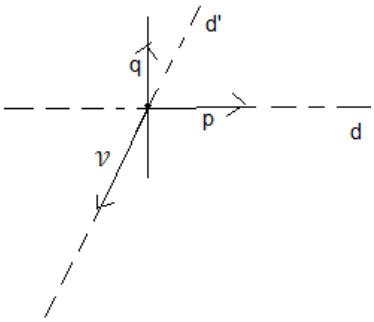
On va dire que les angles $\theta = \widehat{(,)}$ sont des angles polaires , les angles qu'on utilise en coordonnées polaires $0 \leq \theta < 2\pi$

Dans les formules le big problème c'est de savoir de quel angle parle-t-on ?'

La question se pose naturellement : quand est-ce qu'on utilise les angles de deux droites , deux vecteurs , non-orienté , et orientés ...etc ... ??

En fait le problème est bien simple on a une base (p,q) et un vecteur $\mathcal{V}$ de module v, on veut trouver les composantes $(\mathcal{V}_p,\mathcal{V}_q)$ de $\mathcal{V}$ dans cette base c'est-à-dire

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_p\, p+\mathcal{V}_q\, q$



C'est à vous de se débrouiller !!

- Si vous utilisez l'angle polaire $(\widehat{p,\mathcal{V}})$ (les coordonnées polaires) alors on a :

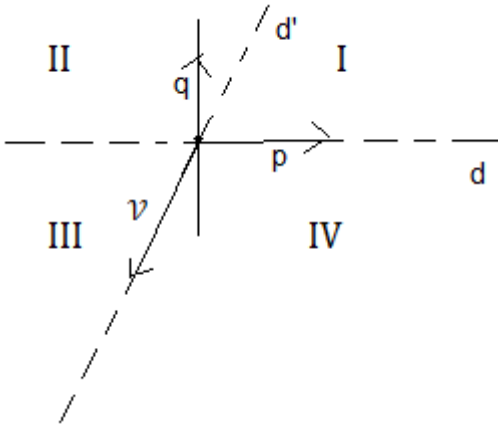
$$\begin{cases} \mathcal{V}_p = v\cos(\widehat{p,\mathcal{V}}) \\ \mathcal{V}_q = v\sin(\widehat{p,\mathcal{V}}) \end{cases}$$

- Si vous connaissez un angle géométrique $\{\widehat{\mathcal{V},d}\}$ par exemple (angle d'un triangle rectangle), alors il faut compléter les signes ±

$$\begin{cases} \mathcal{V}_p = -v\cos\{\widehat{\mathcal{V},d}\} \\ \mathcal{V}_q = -v\sin\{\widehat{\mathcal{V},d}\} \end{cases}$$

On a les relation suivantes

$$\begin{cases} \text{I. } (\widehat{p,\mathcal{V}}) = \{\widehat{\mathcal{V},d}\} \\ \text{II. } (\widehat{p,\mathcal{V}}) = \pi - \{\widehat{\mathcal{V},d}\} \\ \text{III. } (\widehat{p,\mathcal{V}}) = \pi + \{\widehat{\mathcal{V},d}\} \\ \text{IV. } (\widehat{p,\mathcal{V}}) = -\{\widehat{\mathcal{V},d}\} \end{cases}$$



Résumons

I. $0 \leq \{\widehat{d,d'}\} \leq \frac{\pi}{2}$ droite, droite

II. $0 \leq \{\widehat{d, V}\} \leq \frac{\pi}{2}$ droite, vecteur

III. $0 \leq \{\widehat{u, V}\} \leq \pi$ vecteur, vecteur

IV. $0 \leq \{\widehat{d_u, d_v'}\} \leq \pi$ axe, axe

V. $0 \leq (\widehat{u, V}) < 2\pi$ vecteur, vecteur, orienté

5.5 L'EFFET DOPPLER-FIZEAU

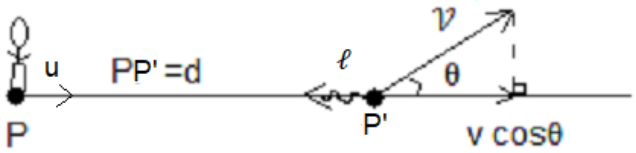
L'effet Doppler-Fizeau est le changement de fréquence pour un observateur fixe quand une source sonore ou lumineuse se déplace (ou inversement). L'observateur reçoit une fréquence ν différente de la fréquence émise ν_0. Par exemple une ambulance s'approche on entend une sirène différente que le conducteur dans l'ambulance.

Cet effet a été découvert en 1842 par Doppler pour les ondes sonores puis par Fizeau en 1848 pour les ondes lumineuses.

I. L'observateur fixe , la source en mouvement,

¤ L' effet Doppler-Fizeau classique

Soit P' une source sonore (le sirène d'un ambulance par exemple) qui se déplace à la vitesse $\mathcal{V}$ par rapport à un observateur P fixe, cette source émet des ondes dans la direction de P ,(P'P) à la vitesse c.

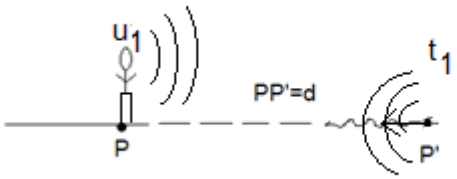


Soient u un vecteur unitaire suivant la direction visée (PP')

$u = \frac{\overrightarrow{PP'}}{||\overrightarrow{PP'}||}$ et ℓ un vecteur unitaire suivant la direction de propagation de l'onde, on a u = -ℓ

Soient $\theta=\{u, \widehat{\mathcal{V}}\}$ l'angle d'aberration c'est-à-dire l'angle u avec le vecteur vitesse $\mathcal{V}$, et $v=||\mathcal{V}||$ le module de la vitesse $\mathcal{V}$.

On considère deux signaux particuliers émis à l'instance t_1 où la distance entre l'observateur P et l'émetteur P' est PP'=d,



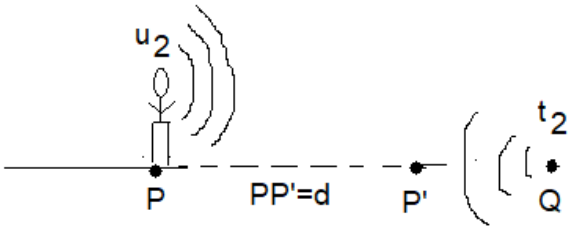
l'instance t_1

Et à l'instance t_2 où la distance est

PQ = PP'+P'Q

= d + v cos θ (t_2 - t_1)

c'est la distance d plus la distance que P' parcourt pendant (t_2 - t_1)



instance t_2

* Le premier signal parvient à l'observateur P à l'instance u_1 est égal à l'instance d'émission t_1 plus la durée mise par le signal pour atteindre l'observateur c'est-à-dire d/c

$$u_1 = t_1 + \frac{d}{c}$$

* Le deuxième signal parvient à l'observateur P à l'instance u_2 est égal à l'instance d'émission t_2 plus la durée mise par le signal pour atteindre l'observateur c'est-à-dire PQ/c

$$u_2 = t_2 + \frac{PQ}{c}$$

$$u_2 = t_2 + \frac{d + v\cos\theta\,(t_2 - t_1)}{c}$$

$$u_2 = t_2 + \frac{d}{c} + \frac{v\cos\theta}{c}(t_2 - t_1)$$

La durée qui sépare deux instances arrivés est donc

$$u_2 - u_1 = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})(t_2 - t_1)$$

Dans le cas particulier où $t_2 - t_1 = T_0$ est la période de l'émission, l'observateur P reçoit une période T différente de T_0

$$T = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})T_0$$

ou en fréquence

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}}$$

Avec $\theta = \{\widehat{u, \mathcal{V}}\}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ c'est l'angle entre deux vecteurs et on peut écrire la formule autrement avec le produit scalaire.

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{\mathcal{V}.u}{c}}$$

Parfois on trouve dans les livres une formule différente

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}$$

Dans ce cas l'angle α est $\alpha = \{\widehat{\ell, \mathcal{V}}\}$

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\mathcal{V}.\ell}{c}}$$

¤ L' effet Doppler-Fizeau relativiste

C'est ici qu'il faut bien comprendre la relativité restreinte.

Dans le cas newtonienne P et P' (disons le conducteur d'ambulance) disposent une seule horloge, il n'est pas importance de savoir qui mesure le temps (u_2 - u_1) et (t_2 - t_1) que ce soit P ou P' le résultat des mesures sera le même.

Par contre en relativité restreinte chaqu'un dispose son propre horloge H et H', et ces horloges ne sont pas synchronisés. Il faut donc savoir qui a fait des mesures du temps. On a donc deux scénarios :

* P' fait des mesures avec son horloge H'

Les durées (u_2 - u_1) et (t_2 - t_1) que mesure P' sont des durées propres car l'horloge H' ne bouge pas par rapport à la source, dans ce cas (t_2 - t_1)=(τ_2 - τ_1). Mais P ne perçoit pas (u_2 - u_1) sur l'écran de son horloge H puisque ces horloges ne sont pas synchronisés. P perçoit une autre valeur (v_2 - v_1) c'est ce qu'on appelle le temps mesuré. Or on a la relation entre le temps mesuré et le temps propre:

$(v_2 - v_1) = \gamma(u_2 - u_1)$

de

$$u_2 - u_1 = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})(t_2 - t_1)$$

ça donne

$$\frac{v_2 - v_1}{\gamma} = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})(\tau_2 - \tau_1)$$

$$v_2 - v_1 = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})\gamma(\tau_2 - \tau_1)$$

$$T = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})\gamma T_0$$

* P fait des mesures avec son horloge H

Les durées (u_2 - u_1) et (t_2 - t_1) que mesure P sont des durées mesurées (non-propre) car l'horloge H bouge par rapport à la source, dans ce cas (u_2 - u_1) est exactement ce que indique H. Mais pour P', l'horloge H' n'indique pas (t_2 - t_1) mais autre chose (τ_2 - τ_1) puisque ces horloges ne sont pas synchronisés. (τ_2 - τ_1) c'est ce qu'on appelle le temps propre car l'horloge H' ne bouge pas par rapport à la source. Or on a la relation entre le temps mesuré et le temps propre:

(t_2 - t_1) = γ(τ_2 - τ_1)

de

$$u_2 - u_1 = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})(t_2 - t_1)$$

ça donne

$$u_2 - u_1 = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})\gamma(\tau_2 - \tau_1)$$

$$T = (1 + \frac{v \cos \theta}{c})\gamma T_0$$

On trouve bien la même chose, ou en fréquence

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v\cos\theta}{c}}\nu_0$$

ou

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{\mathcal{V}.u}{c}}\nu_0$$

Remarque l'utilisation (ν, ν_0) signifie que l'observateur est fixe et l'objet est en mouvement).

Parfois on trouve dans des livres l'utilisation l'angle α, du vecteur d'émission (de propagation) ℓ avec le vecteur $\mathcal{V}$ $\alpha=\{\widehat{\ell,\mathcal{V}}\}$ et on a $\alpha=\pi-\theta$, l'angle supplémentaire , la formule deviendra

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\cos\alpha}{c}}\nu_0$$

ou

$$\nu = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{\mathcal{V}.\ell}{c}}\nu_0$$

NOTE : * Lorsque $\theta=0$ c'est-à-dire l'émetteur s'éloigne de l'observateur on retrouve les formules usuelles

Cas non relativiste

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

Cas relativiste

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \nu_0$$

Dans ce cas on a un décalage vers le rouge ($\nu < \nu_0$) ou le son est plus grave.

* et quand $\theta=\pi$ c'est-à-dire l'émetteur s'approche de l'observateur on a:

Cas non relativiste

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

Cas relativiste

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \nu_0$$

Dans ce cas on a un décalage vers le bleu ($\nu_0 < \nu$) ou le son est plus aigu.

* et quand $\theta=\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire le cas tranversal l'émetteur se déplace perpendiculairement à l'observateur on a:

Cas non relativiste

$$\nu = \nu_0$$

Cas relativiste

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ce qui montre que sans la relativité restreinte on ne peut pas expliquer le changement de fréquence dans ce cas.

Récapitulons :

Cas classique

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{\mathcal{V}.u}{c}}$$

Cas relativiste

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{\mathcal{V}.u}{c}} \nu_0$$

On peut garder en mémoire la formule avec le slogan suivant: s'éloigner=+v, s'approcher=-v, classique $v^2/c^2 \to 0$

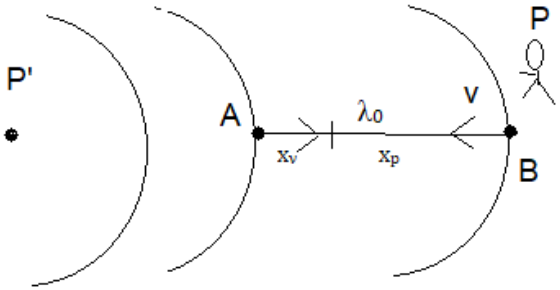
$$\boxed{\nu = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{\mathcal{V}.u}{c}} \nu_0}$$

Slogan : s'éloigner = +v , s'approcher = -v

II. L'observateur en mouvement, la source fixe

¤ cas classique

La source P' est maintenant fixe c'est l'observateur P qui déplace vers la source à la vitesse v, on note la distance entre deux crêtes AB=λ_0 c'est la longueur d'onde,



Soit x_p la distance que l'observateur a parcouru pendant un temps t

$x_p = vt$

de l'autre côté, l'onde parcourt pendant un temps T

$x_\lambda = cT$

L'onde et l'observateur se rencontrent entre [A,B] donc

$x_\lambda + x_p = \lambda_0$

la rencontre exige que t=T d'où

$cT + vT = \lambda_0$

$(c + v)T = \frac{c}{\nu_0}$

$(1 + \frac{v}{c})\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_0}$

$\nu = (1 + \frac{v}{c})\nu_0$

On voit que dans le cas non-relativiste, l'observateur en mouvement et la source en mouvement ne sont pas symétriques.

Si l'observateur s'éloigne de la source il suffit de changer v en -v dans la formule.

On peut en fait regrouper ces formules (cas classique) en une seule formule avec:

v_p = vitesse observateur , v_λ = vitesse source

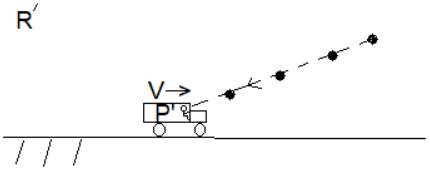
Slogan: s'éloigner le milieu=+v, s'approcher le milieu= -v

$$\boxed{\nu = \frac{c - v_p}{c + v_\lambda}\nu_0}$$

5.6 L'ABERRATION DE LA LUMIÈRE

L'aberration de la lumière est un phénomène découvert par Bradley en 1925 on observant les étoiles : La direction d'une source lumineuse est différente suivant l'observateur est fixe ou en mouvement par rapport à la source, de la même façon la pluie tombe verticalement pour un observateur fixe, mais elle tombe en diagonale venant en face pour celui qui bouge.

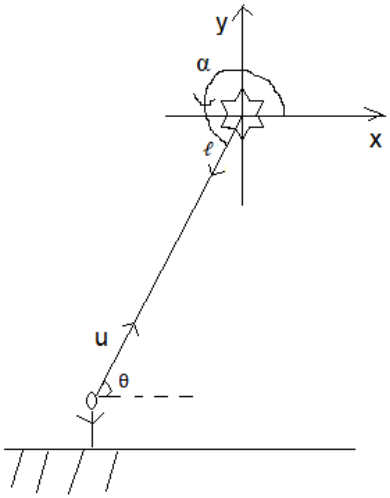
Observateur fixe

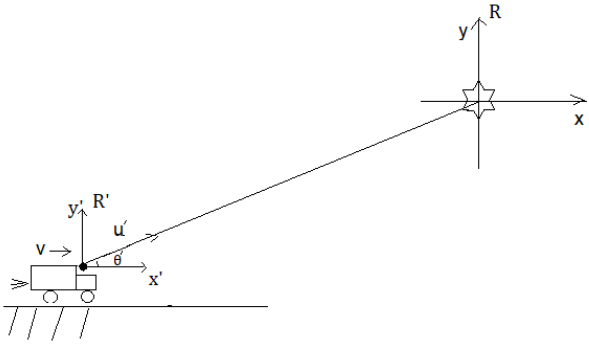


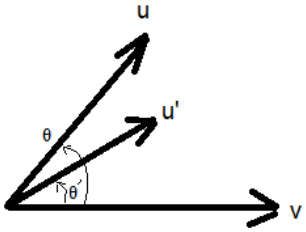
Observateur en mouvement

Soit $\alpha = (\widehat{v, \ell})$ l'angle "polaire" (angle orienté) entre v et ℓ où v est la vitesse de l'observateur et ℓ=vecteur unitaire suivant la direction de propagation, $\alpha \in [0, 2\pi[$

et u = vecteur unitaire suivant la direction visée (observateur vers source) u=-ℓ







<u>cas classique</u>

$\ell_x = c \cos \alpha$, $\ell_y = c \sin \alpha$

$\ell'_x = c \cos \alpha - v$, $\ell'_y = c \sin \alpha$

$$\tan \alpha' = \frac{\ell'_y}{\ell'_x} = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha - v}$$

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{v}{c}}$$

Au lieu d'utiliser l'angle "polaire" $\alpha=(\widehat{v,\ell})$
traditionnellement on utilise l'angle d'aberration $\theta=\{\widehat{v,u}\}$
l'angle entre la vitesse et la direction visée u, $\alpha=\pi+\theta$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{v}{c}}$$

<u>cas relativiste</u>

$\ell_x = c\cos\alpha$, $\ell_y = c\sin\alpha$

$$\ell'_x = \frac{\ell_x - v}{1 - \frac{v\ell_x}{c^2}}$$

$$\ell'_y = \ell_y \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v\ell_x}{c^2}}$$

$$\tan\alpha' = \frac{\ell'_y}{\ell'_x} = \frac{\ell_y}{\ell_x}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{\ell_x}}$$

$$\tan\alpha' = \sin\alpha\ \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\alpha - \frac{v}{c}}$$

ou en θ

$$\tan\theta' = \sin\theta \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\theta + \frac{v}{c}}$$

Supposons que l'étoile soit au dessus de notre tête c'est-à-dire $\theta=\frac{\pi}{2}$ on a:

<u>cas classique</u>

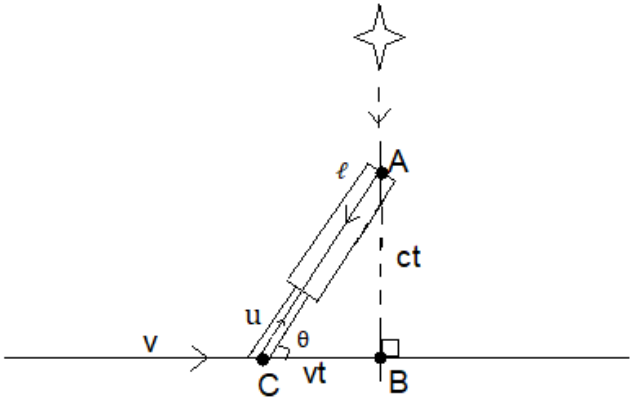
$$\tan\theta' = \frac{c}{v}$$

<u>cas relativiste</u>

$$\tan\theta' = \frac{c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

<u>Orientation du télescope</u>

Supposons qu'on veut observer une étoile juste au dessus de notre tête, du fait que la Terre bouge , il faut incliner le télescope pour voir l'étoile



Il faut incliner le télescope d'un angle $\theta = \widehat{\{v, u\}}$ de telle sorte que le point C arrive en B en même temps que la lumière, Soit t ce temps, on a:

CB = vt

La lumière entre A, elle doit mettre le même temps t pour parcourir AB donc

AB = ct

d'où

$\tan \theta = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$

5.7 LA CONSERVATION DU QUADRI IMPULSION

En mécanique classique (newtonienne) on a deux lois de conservations: la conservation d'énergie et la conservation la quantité de mouvement pour un système isolé. En relativité restreinte on a aussi ces deux lois mais regroupées , unifiées une seule loi : la conservation du quadrivecteur impulsion pour un système isolé.

Les lois de conservations sont ultimement liées aux principes de symétrie, voyons pour la loi de conservation d'énergie E.

à priori le lagrangien d'un système isolé dépend (explicitement) le temps L=L(x,v,t) et on a:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} dv + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} v + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

on remplace $\frac{\partial L}{\partial x}$ par $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v})$ (équation Lagrange) d'où

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) v + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}\ v) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\ v - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Or l'uniformité du temps implique $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, en effet

- l'uniformité du temps signifie : L(x,v,t+dt) = L(x,v,t)

- l'égalité: $L(x, v, t + dt) = L(x, v, t) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

implique $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\ v - L\right) = 0$$

Soit

E = C^{te} au cours du temps

* Pour la conservation de la quantité du mouvement p c'est encore plus simple, elle résulte de l'équation Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Or l'homogénéité de l'espace implique $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, en effet

- l'homogénéité de l'espace signifie : L(x+dx,v) = L(x,v)

- l'égalité: $L(x + dx, v) = L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial x} dx$

implique $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0$$

Soit

$p = C^{te}$ au cours du temps

Finalement on a la loi de conservation suivante: Dans un choc ou une collision on a la conservation du quadrivecteur impulsion, c'est-à-dire le quadri impulsion avant le choc est égale au quadri impulsion après le choc

$$p^{i}_{avant} = p^{i}_{après}$$

cette loi est valable dans n'importe quel référentiel galiléen c'est-à-dire, on a aussi

$$p'^{u}_{avant} = p'^{u}_{après}$$

dans R'.

Cette loi nous implique deux lois:

1. La conservation d'énergie E: $E_{avant} = E_{après}$

2. La conservation du vecteur impulsion p: $p_{avant} = p_{après}$

Pour ne pas alourdir les notations on note simplement :

$p^i_{avant} = p^i$

$p^i_{après} = p^{\circ i}$ (°=après)

donc

$p^i = p^{\circ i}$

Attention !! ne pas confondre entre "conservé" et "invariant". Une grandeur A est conservée si elle reste la même au cours du temps.

∀R référentiel galiléen A = A° au cours du temps, exemples:

- L'énergie E est conservé : E=E° (mais pas invariant E≠E')

- La quantité de mouvement p est conservée : p=p° (mais par invariante p≠p')

- La charge q est conservée : q=q° (et aussi invariante q=q')

.....

Une grandeur A est invariante si elle reste la même lors qu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre

A = A'

exemple:

- La vitesse de la lumière c : c=c'

- L'intervalle S^2 : $S^2 = S'^2$

- $d\tau$; τ=temps propre

- La charge q

- La masse m (comme la charge)

.....

5.8 COLLISION

Référentiel du centre de masse

Pour étudier les collisions entre les particules on a l'habitude de travailler dans un référentiel R^* nommé référentiel du centre de masse puis on repasse au référentiel du laboratoire R.

Par définition, le référentiel du centre de masse R^* c'est le référentiel par rapport au quel le vecteur impulsion p^* vaut zéro $p^* = 0$.

Ce référentiel existe évidement, en effet pour une particule définie par (E,p) la transformation de Lorentz donne

$$\begin{cases} p^{*0} = \gamma(p^0 - \beta p^1) \\ P^{*1} = \gamma(-\beta p^0 + p^1) \\ p^{*2} = p^2 \\ p^{*3} = p^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^{*0} = \gamma(p^0 - \beta p^1) \\ 0 = (-\beta p^0 + p^1) \\ 0 = p^2 \\ 0 = p^3 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{p^1}{p^0}$$

Une fois trouver β on peut trouve la vitesse v^* de R^* par rapport à R, c'est-à-dire on trouve R^*

Comme $(p^i)^2$ est invariant, on peut relier l'énergie E^* à E

dans R: $p^i = (E/c, p)$

dans R^* : $p^{*i} = (E^*/c, 0)$

d'où

$E^2/c^2 - p^2 = E^{*2}/c^2$

$E^2 - p^2c^2 = E^{*2}$

A) <u>Choc mou entre deux particules de même masse</u>

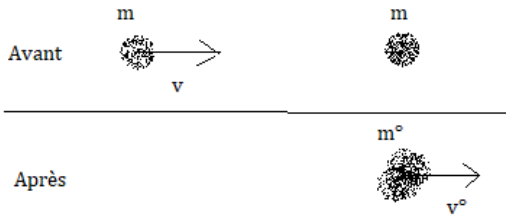
<u>Avant</u>

Une particule de masse m, ayant la vitesse v frappe sur une autre particule immobile de même masse m

<u>Après</u>

On a une particule de masse m°, avec une vitesse v°

Notre but c'est de calculer m°, la masse après la collision.



On a un système isolé, on pourra donc impliquer la conservation du quadri impulsion du système.

avant le choc on a:

$p_1^i = (\gamma mc, \gamma mv),\ p_2^i = (mc, 0)$

après le choc

$p^{\circ i} = (\gamma^\circ m^\circ c, \gamma^\circ m^\circ v^\circ)$

ce qui donne

$$\begin{cases} \gamma mc + mc = \gamma^\circ m^\circ c \\ \gamma mv = \gamma^\circ m^\circ v^\circ \end{cases}$$

mettons tout le monde au carré

$$\begin{cases} \gamma^2 m^2 c^2 + 2\gamma m^2 c^2 + m^2 c^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} c^2 \\ \gamma^2 m^2 v^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} v^{\circ 2} \end{cases}$$

simplifions la 1ère par c^2, et divisons la 2ème par c^2

$$\begin{cases} \gamma^2 m^2 + 2\gamma m^2 + m^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} \\ \gamma^2 m^2 \beta^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} \beta^{\circ 2} \end{cases}$$

on fait 1ère - 2ème

$\gamma^2 m^2 + 2\gamma m^2 + m^2 - \gamma^2 m^2 \beta^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} - \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} \beta^{\circ 2}$

$(\gamma^2 + 2\gamma + 1 - \gamma^2 \beta^2) m^2 = \gamma^{\circ 2} m^{\circ 2} (1 - \beta^{\circ 2})$

sachant que $\gamma^2(1-\beta^2)=1$

il nous reste

$(2\gamma + 2) m^2 = m^{\circ 2}$

soit

$m^{\circ} = m\sqrt{2\gamma + 2}$

comme $\gamma \geq 1 \Rightarrow$ On voit que $m° \geq 2m$

Dans ce genre de choc, on ne perd pas de la masse $m°<2m$. La masse (m+m) ne peut pas transformer en énergie cinétique v°.

Attention !! le 'm' dans ce cours c'est la masse de la particule, la quantité de matière contenue dans la particule, elle est donc invariante, comme la charge q d'une électron. La masse d'un électron m_e=511 keV, la masse d'un proton m_p=938 MeV

B) Collision mou entre deux particules de même masse

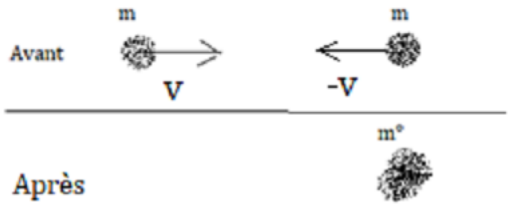
Avant

Deux particules de même masse m, ayant des vitesses opposées v entrent en collision

Après

On a une particule de masse m°, avec une vitesse v°=0

Notre but c'est de calculer m°, la masse après la collision.



Dans ce cas c'est assez simple , en effet

avant le choc on a:

$p_1^i = (\gamma mc, \gamma mv),\ p_2^i = (\gamma mc, -\gamma mv)$

après le choc

$p^{\circ i} = (m^{\circ}c, 0)$

d'où

$2\gamma mc = m°c$

$m° = 2\gamma m$

$m° \geq 2m$

5.9 ENERGIE DU SEUIL

Un veut fabriquer des antiproton $\overline{p}$ suivant la réaction :

$p + p \rightarrow 3p + \overline{p}$

Un proton p frappe à tout vitesse sur un autre proton immobile et on veut chercher E_{min} l'énergie minimum qu'on doit fournir a p pour avoir cette réaction.

Dans R^* on a:

$p^{*i} = (E^*/c, p^*)$ avec $E^* = 4mc^2$ car $p^* = 0$

et dans R :

$p^i = (E/c + mc, p)$

Il sera plus simple d'utiliser la norme du quadri impulsion dans R^* et dans R que de passer par la transformation de Lorentz

On a $(p^i)^2 = (p^{*i})^2$ la norme est invariante

$(E/c + mc)^2 - p^2 = (4mc)^2$

$E^2/c^2 + m^2c^2 + 2Em - p^2 = 16m^2c^2$

$E^2 + m^2c^4 + 2Emc^2 - c^2p^2 = 16m^2c^4$

$E^2 + m^2c^4 + 2Emc^2 - E^2 + m^2c^4 = 16m^2c^4$

$E = 7mc^2$

donc l'énergie minimum $E_{min} = 7mc^2$ c'est l'énergie du seuil.

5.10 CHOC ÉLASTIQUE

C) Choc élastique entre deux particules de même masse

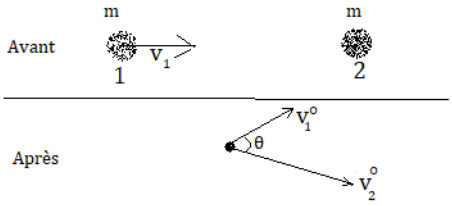
Avant

Une particule 1 de masse m, ayant la vitesse v_1 frappe sur une autre particule 2 immobile de même masse m.

Après

La particule mobile 1 repart avec une vitesse v_1^0, celle immobile 2 part avec une vitesse v_2^0

Soit $\theta = (\widehat{v_1^0, v_2^0})$, notre but c'est de calculer l'angle θ.



Écrivons la conservation du quadri impulsion du système.

Avant le choc on a:

$p_1^i = (\gamma_1 mc, \gamma_1 mv_1),\ p_2^i = (mc, 0)$

Après le choc

$p_1^{\circ i} = (\gamma_1^\circ mc, \gamma_1^\circ mv_1^\circ)$, $p_2^{\circ i} = (\gamma_2^\circ mc, \gamma_2^\circ mv_2^\circ)$

ce qui donne

$$\begin{cases} \gamma_1 mc + mc = \overset{\circ}{\gamma_1} mc + \overset{\circ}{\gamma_2} mc \\ \gamma_1 m v_1 = \overset{\circ}{\gamma_1} m \overset{\circ}{v_1} + \overset{\circ}{\gamma_2} m \overset{\circ}{v_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + 1 = \overset{\circ}{\gamma_1} + \overset{\circ}{\gamma_2} \ (1) \\ \gamma_1 v_1 = \overset{\circ}{\gamma_1} \overset{\circ}{v_1} + \overset{\circ}{\gamma_2} \overset{\circ}{v_2} \ (2) \end{cases}$$

élevons (2) au carré

$$\gamma_1^2 v_1^2 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} \overset{\circ 2}{v_1} + \overset{\circ 2}{\gamma_2} \overset{\circ 2}{v_2} + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{v_1}.\overset{\circ}{v_2}$$

le produit scalaire de deux vecteurs $\overset{\circ}{v_1}.\overset{\circ}{v_2} = \overset{\circ}{v_1}\overset{\circ}{v_2}\cos\theta$, $\overset{\circ}{v_1}, \overset{\circ}{v_2}$ deviennent maintenant en module (nombre)

$$\gamma_1^2 v_1^2 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} \overset{\circ 2}{v_1} + \overset{\circ 2}{\gamma_2} \overset{\circ 2}{v_2} + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{v_1}\overset{\circ}{v_2} \cos\theta$$

$$\gamma_1^2 v_1^2/c^2 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} \overset{\circ 2}{v_1}/c^2 + \overset{\circ 2}{\gamma_2} \overset{\circ 2}{v_2}/c^2 + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{v_1}\overset{\circ}{v_2} \cos\theta/c^2$$

$$\gamma_1^2 \beta_1^2 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} \overset{\circ 2}{\beta_1} + \overset{\circ 2}{\gamma_2} \overset{\circ 2}{\beta_2} + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{\beta_1}\overset{\circ}{\beta_2} \cos\theta$$

comme $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$ ça donne

$$\gamma_1^2 - 1 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} - 1 + \overset{\circ 2}{\gamma_2} - 1 + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{\beta_1}\overset{\circ}{\beta_2} \cos\theta$$

$$\gamma_1^2 + 1 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} + \overset{\circ 2}{\gamma_2} + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}\, \overset{\circ}{\beta_1}\overset{\circ}{\beta_2} \cos\theta$$

or

mettons maintenant (1) au carré

$$\gamma_1^2 + 1 + 2\gamma_1 = \overset{\circ 2}{\gamma_1} + \overset{\circ 2}{\gamma_2} + 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2}$$

$$\gamma_1^2 + 1 - \overset{\circ 2}{\gamma_1} - \overset{\circ 2}{\gamma_2} = 2\overset{\circ}{\gamma_1}\overset{\circ}{\gamma_2} - 2\gamma_1$$

d'où

$$2\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ} - 2\gamma_1 = 2\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\beta_2^{\circ}\cos\theta$$

$$\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ} - \gamma_1 = \gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\beta_2^{\circ}\cos$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ} - \gamma_1^{\circ} + 1 - \gamma_2^{\circ}}{\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\beta_2^{\circ}}$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1^{\circ}(\gamma_2^{\circ} - 1) + 1 - \gamma_2^{\circ}}{\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\beta_2^{\circ}}$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1^{\circ}(\gamma_2^{\circ} - 1) - (\gamma_2^{\circ} - 1)}{\gamma_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\beta_2^{\circ}}$$

$$\cos\theta = \frac{(\gamma_2^{\circ} - 1)(\gamma_1^{\circ} - 1)}{\gamma_1^{\circ}\,\beta_1^{\circ}\gamma_2^{\circ}\beta_2^{\circ}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(\gamma_1^{\circ} - 1)^2(\gamma_2^{\circ} - 1)^2}{\gamma_1^{\circ 2}\,\beta_1^{\circ 2}\,\gamma_2^{\circ 2}\beta_2^{\circ 2}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(\gamma_1^{\circ} - 1)^2(\gamma_2^{\circ} - 1)^2}{(\gamma_1^{\circ 2} - 1)(\gamma_2^{\circ 2} - 1)}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(\gamma_1^{\circ} - 1)(\gamma_2^{\circ} - 1)}{(\gamma_1^{\circ} + 1)(\gamma_2^{\circ} + 1)}$$

$$\cos\,\theta = \sqrt{\frac{(\gamma_1^{\circ} - 1)(\gamma_2^{\circ} - 1)}{(\gamma_1^{\circ} + 1)(\gamma_2^{\circ} + 1)}}$$

Remarque

1. le cos θ > 0 ça signifie que l'angle $\theta = \{\widehat{v_1^\circ, v_2^\circ}\}$ est aigu

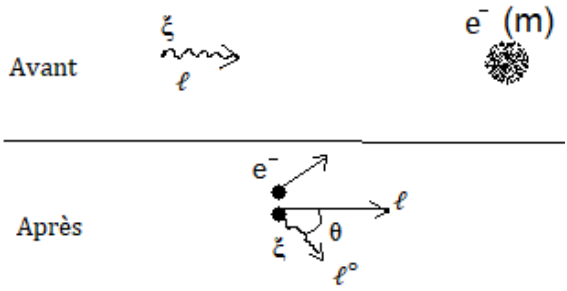
2. dans le cas classique $\gamma_1^\circ = 1, \gamma_2^\circ = 1$, le cos θ = 0 ça signifie que l'angle $\theta = \{\widehat{v_1^\circ, v_2^\circ}\}$ est $\frac{\pi}{2}$ c'est ce qu'on trouve dans le cas classique.

Diffusion Compton

Avant : Un photon ξ frappe une électron immobile e^- de masse m, suivant la direction ℓ (ℓ=vecteur unitaire suivant la direction de propagation)

Après : Après le choc l'électron e^- part vers une direction v° et le photon ξ prend une autre direction $\ell°$($\ell°$=vecteur unitaire suivant la direction de propagation)

On veut calculer l'angle $\theta=\{\widehat{\ell, \ell^\circ}\}$ nommé l'angle de diffusion.



Le quadri impulsion avant le choc:

$$p^{i} = (\frac{h\nu}{c} + mc, \frac{h\nu}{c}\ell)$$

Le quadri impulsion après le choc:

$$p^{\circ i} = (\frac{h\nu^{0}}{c} + \gamma^{\circ}mc, \frac{h\nu^{\circ}}{c}\ell^{\circ} + \gamma^{\circ}mv^{\circ})$$

Le quadri impulsion est conservé, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} + mc = \frac{h\nu^{0}}{c} + \gamma^{\circ}mc \\ \frac{h\nu}{c}\ell = \frac{h\nu^{\circ}}{c}\ell^{\circ} + \gamma^{\circ}mv^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu^{0}}{c} + mc = \gamma^{\circ}mc \\ \frac{h\nu}{c}\ell - \frac{h\nu^{\circ}}{c}\ell^{\circ} = \gamma^{\circ}mc\beta^{\circ} \end{cases}$$

mettre tous aux carrés

$$\begin{cases} (\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu^0}{c} + mc)^2 = \gamma^{\circ 2} m^2 c^2 \\ (\frac{h\nu}{c}\,\ell - \frac{h\nu^{\circ}}{c}\,\ell^{\circ})^2 = \gamma^{\circ 2} m^2 c^2 \beta^{\circ 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{h\nu}{c})^2 + (\frac{h\nu^0}{c})^2 + m^2c^2 - \frac{2h\nu h\nu^{\circ}}{c^2} + \frac{2h\nu mc}{c} - \frac{2h\nu^{\circ} mc}{c} = \gamma^{\circ 2} m^2 c^2 \\ (\frac{h\nu}{c})^2 + (\frac{h\nu^{\circ}}{c})^2 - \frac{2h\nu h\nu^{\circ}}{c^2}\,\ell.\ell^{\circ} = \gamma^{\circ 2} m^2 c^2 \beta^{\circ 2} \end{cases}$$

on fait 1ère - 2ème puis utilisez les relations $\gamma^2(1-\beta^2)=1$, $\ell.\ell^{\circ}=\cos\theta$

$$\frac{\nu h\nu^{\circ}}{c^2}\,\ell.\ell^{\circ} - \frac{\nu h\nu^{\circ}}{c^2} + m(\nu - \nu^{\circ}) = 0$$

$$(\nu - \nu^{\circ}) = \frac{\nu h\nu^{\circ}}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

$$(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda^{\circ}}) = \frac{h}{m\lambda\lambda^{\circ}}(1 - \cos\theta)$$

$$(\lambda^{\circ} - \lambda) = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

5.11 DÉSINTÉGRATION

Désintégration bêta

Un neutron isolé c'est-à-dire pas dans un noyau , au bout de 15 minutes se désintègre spontanément selon la réaction

$n \rightarrow p + e^-$

c'est la radioactif de type β . On veux calculer l'énergie E_e° de l'électron e^- après la réaction.

Allons y

Avant : $E = \gamma mc^2 = mc^2$ et $p=0$

car le neutron est immobile

Après : $E° = \gamma_p m_p c^2 + \gamma_e m_e c^2$

$p° = \gamma_p m_p \mathcal{V}_p + \gamma_e m_e \mathcal{V}_e$

La conservation du quadri impulsion donne

$$\begin{cases} m = \gamma_p m_p + \gamma_e m_e \\ \gamma_p m_p \mathcal{V}_p + \gamma_e m_e \mathcal{V}_e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \gamma_p m_p + \gamma_e m_e \\ \gamma_p m_p \mathcal{V}_p = -\gamma_e m_e \mathcal{V}_e \ (1) \end{cases}$$

En prenant la norme de deux côtés de (1) on a la relation (1) entre les modules des vitesses

$$\gamma_p m_p v_p = \gamma_e m_e v_e$$

$$\gamma_p m_p v_p / c = \gamma_e m_e v_e / c$$

$$\gamma_p m_p \beta_p = \gamma_e m_e \beta_e$$

$$\gamma^2{}_p m^2{}_p \beta^2{}_p = \gamma^2{}_e m^2{}_e \beta^2{}_e$$

$$(\gamma^2{}_p - 1) m^2{}_p = (\gamma^2{}_e - 1) m^2{}_e$$

$$\gamma^2{}_p m^2{}_p - m^2{}_p = \gamma^2{}_e m^2{}_e - m^2{}_e$$

$$(m - \gamma_e m_e)^2 - m^2{}_p = \gamma^2{}_e m^2{}_e - m^2{}_e$$

$$m^2 - m_p^2 + m_e^2 = 2m\gamma_e m_e$$

$$\gamma_e = \frac{m^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m m_e}$$

d'où

$$E_e^\circ = \gamma_e m_e c^2 = \frac{m^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m} c^2$$

Le calcul montre que l'énergie E_e° de l'électron est la même quelque soit cette réaction, or l'expérience montre que E_e° varie !! suivant l'expérience. Alors

- Soit la conservation de p^i est faux

- Soit l'équation de la réaction est fausse $n \rightarrow p + e^-$

En 1930 Pauli a suggéré que l'équation de la réaction est fausse et postulait l'existences d'une particule $\bar{\nu}_e$ nommée neutrino-électrique et l'équation devient alors

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

Un nouveau calcul montre E_e° varie avec la réaction donc correspond avec l'expérience, mais il fallait attendre jusqu'au 1956 pour la détection de $\bar{\nu}_e$, ce neutrino a une masse très faible environ 2,5 eV

5.12 QUADRI IMPULSION D'UN PHOTON

Le quadri impulsion du photon nous permet de comprendre plusieurs phénomènes optiques

$$p^i = (\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\ell)$$

En passant dans un autre référentiel R' on a:

$$p'^i = (\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c}\ell')$$

$$\begin{cases} \frac{h\nu'}{c} = \gamma(\frac{h\nu}{c} - \beta\frac{h\nu}{c}\ell_x) \\ \frac{h\nu'}{c}\ell'_x = \gamma(-\beta\frac{h\nu}{c} + \frac{h\nu}{c}\ell_x) \\ \frac{h\nu'}{c}\ell'_y = \frac{h\nu}{c}\ell_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu' = \gamma(\nu - \beta\nu\ell_x) \ (1) \\ \nu'\ell'_x = \gamma(-\beta\nu + \nu\ell_x) \ (2) \\ \nu'\ell'_y = \nu\ell_y \ (3) \end{cases}$$

C'est le comportement de la lumière en passant d'un référentiel à un autre.

Effet Doppler (changement de fréquence)

* La 1ère équation explique l'effet Doppler relativiste dans le cas l'observateur en mouvement (ν') et l'émetteur fixe (ν) .

$$\nu' = \gamma(\nu - \beta\nu\ell_x) \quad (1)$$

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha)$$

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pour θ=0

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Remarque on retrouve le cas classique v≤c ou $\frac{v}{c} \leq 1$, en faissant le développement limité d'ordre 1 en v/c, c'est-à-dire on prend carrément

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} = \sqrt{1+\beta}$$

$$\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = (\sqrt{1+\beta})^2 = 1+\beta$$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \nu = \nu_0(1+\beta)$$

Note : Pour l'effet Doppler relativiste , le cas l'observateur en mouvement ou la source en mouvement ces deux situations sont symétriques, ce qui correspond bien avec le principe de réciprocité.

- Source en mouvement

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

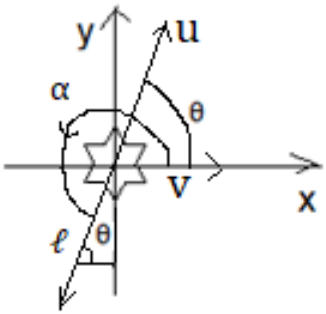
- Observateur en mouvement

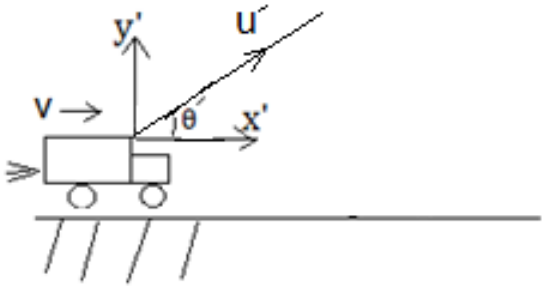
$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

On obtient la même formule en remplaçant v par -v

Aberration de direction :

Ici on considère l'observateur en mouvement, la source est fixe,





On cherche l'angle d'aberration $\theta = \{\widehat{v,u}\}$, soit

$\alpha = (\widehat{v,\ell})$ l'angle polaire $\alpha = \theta+\pi$, on a

$\ell_x = \cos\alpha\,, \ell_y = \sin\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\ell_y}{\ell_x}$

$$\tan \alpha' = \frac{\ell'_y}{\ell'_x}$$

$$\frac{\nu' \ell'_y}{\nu' \ell'_x} = \frac{\nu \ell_y}{\gamma(-\beta\nu + \nu \ell_x)}$$

$$\frac{\ell'_y}{\ell'_x} = \frac{\ell_y}{\gamma(-\beta + \ell_x)}$$

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma(-\beta + \cos \alpha)}$$

Soit en θ, angle d'aberration

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)}$$

6 ELECTROMAGNÉTIQUE

6.1 FORMALISTE VECTORIELLE

Les lois électromagnétiques sont la force de Lorentz et les équations de Maxwell.

Dans ce chapitre nous voulons retrouver la force de Lorentz et les équations de Maxwell par le principe de moindre action, pour cela nous supposons que la particule P = (m,q) est caractérisée par sa masse m et sa change q , et le champ électromagnétique quant à lui sera caractérisé par un quadrivecteur $A^i = (\mathcal{U}/c, A)$

A^i nommé quadrivecteur potentiel.

$A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$A^i = (\mathcal{U}/c, A)$; $\mathcal{U}$=potentiel scalaire, A=potentiel vecteur

$A_i = (\mathcal{U}/c, -A)$

$A = (A^1, A^2, A^3) = (A_x , A_y , A_z)$

On impose de plus que A^i doit vérifier :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla . A = 0$$

On dit que A^i vérifie le jauge de Lorenz.

Note : On montrera plus tard que A^i est bel et bien un quadrivecteur.

6.2 L'ÉQUATION DU CHAMP

Le principe de moindre action nous permet aussi de trouver l'équation du champ, le calcul est un peu prés le même dans le cas de l'équation du mouvement, c'est la même technique.

Le champ est caractérisé par un quadrivecteur A^i donc le lagrangien $L(A_i , \partial_k A_i)$ i,k=0,1,2,3 est une fonction de A^i, $\partial_k A_i$ et l'action du champ sera

$$S = \frac{1}{c}\int L\,(A_i, \partial_k A_i) d\Omega$$

Au lieu d'intégrer sur dt, comme dans le cas de l'équation du mouvement, ici on intègre sur un volume dΩ car le champ est partout dans l'espace.

// pour voir d'où vient la constance $\frac{1}{c}$ l'explication est suivante :

Le lagrangien est en réalité de la forme

$$L = \int \zeta(A_i , \partial_k A_i)\ d\vartheta$$

on intègre sur le volume $d\vartheta$ puisque le champ est partout dans l'espace

Or par définition de S c'est l'intégrale sur dt

$$S = \int L\ dt$$

$$S = \int \zeta(A_i , \partial_k A_i) d\vartheta dt$$

comme $\frac{1}{c} d\Omega = d\vartheta dt$

$$S = \frac{1}{c} \int \zeta(A_i , \partial_k A_i) d\Omega$$

ζ se nomme plutôt une "densité lagrangien" mais on ne va pas casser la tête pour introduire un nouveau nom et une nouvelle fonction ζ , on passe donc directement en L, autrement dit on renomme ζ en L, et on l'appelle encore le lagrangien c'est tout !! //

Pour trouver l'équation du champ, dans $\delta S=0$ on fait varier δA_i et l'intégrale sur les bornes $\partial\Omega$ est nulle.

$\delta S=0$

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \delta L\ (A_i, \partial_k A_i) d\Omega$$

$$\delta S = \frac{1}{c}\int [\frac{\partial L}{\partial A_i}\delta A_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\delta(\partial_k A_i)]d\Omega$$

Dans le 1er morceau de la somme on a déjà δA_i, dans le 2ème morceau on a $\delta(\partial_k A_i) = \partial_k(\delta A_i)$ (primitive de δA_i) donc on va faire une intégration par partie sur le morceau $\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\partial_k(\delta A_i)$ (l'intégration par rapport à x^k)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)} \to \partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right) \text{ ; dériver par rapport à } x^k \\ \partial_k(\delta A_i) \to \delta A_i \text{ ; primitive par rapport à } x^k \end{cases}$$

$$\int \frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\partial_k(\delta A_i)\, d\Omega$$
$$= \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\delta A_i\right]_{\partial\Omega} - \int \partial_k(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)})\delta A_i\, d\Omega$$

Mais l'intégrale est nulle sur les bornes $\partial\Omega$

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \frac{\partial L}{\partial A_i}\delta A_i\, d\Omega - \frac{1}{c}\int \partial_k(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)})\delta A_i\, d\Omega$$

$$\delta S = \frac{1}{c}\int [\frac{\partial L}{\partial A_i} - \partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right)]\delta A_i\, d\Omega$$

Cette intégrale est nulle quel que soit la variation δA_i donc

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} - \partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right) = 0 \text{ ; } k = 0,1,2,3$$

$$\partial_k\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_i} \text{ ; } k = 0,1,2,3$$

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_k A_i)} \right) = \frac{\partial L}{\partial A_i}$$

c'est l'équation du champ.

¤ La force de Lorentz

Pour retrouver la force de Lorentz d'une particule P=(m,q) de vitesse v plongé dans le champ , il faut d'abord trouver le lagrangien du système (particule+champ) et appliquez l'équation de mouvement (l'équation de Lagrange)

Pour la particule on a:

$$L_p = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pour le lagrangien d'interaction champ/particule. Il faut prendre un truc qui soit invariant, et qui fait intervenir le champs et la particule, quelque chose qui soit invariant c'est bien le produit scalaire de deux quadrivecteurs, on prend simplement $A_i dx^i$ n'oubliez pas que dx^i lui aussi est un quadrivecteur.

$$S_{c/p} = -q \int A_i dx^i$$

$A_i\, dx^i = \frac{\mathcal{U}}{c} d(ct) + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$; c'est ici qu'on prend $\mathcal{U}/c$ plutôt que simplement $\mathcal{U}$.

$A_i\, dx^i = \mathcal{U} dt - A^1\, dx^1 - A^2\, dx^2 - A^3\, dx^3$

$A_i\,dx^i = \mathcal{U}dt - A.\,dr = (\mathcal{U} - A.\frac{dr}{dt})dt$

$A_i\,dx^i = \mathcal{U}dt - A.\,dr = (\mathcal{U} - A.v)dt$

$$S_{c/p} = \int q(A.\,v - \mathcal{U})dt$$

d'où

$L_{c/p} = q(A.\,v - \mathcal{U})$; c'est interaction du champ sur la particule (quant-à l'interaction de la particule sur le champ $L_{p/c}$ on l'ignore ! elle est négligeable)

finalement

$$L = L_p + L_{c/p} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q(A.\,v - \mathcal{U})$$

calculons

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + qA = p + qA$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}) = \frac{dp}{dt} + q\frac{dA}{dt}$$

or

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t}dt + \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v.\nabla)A \ ; \nabla = \text{nabla}$$

Calculons maintenant

$$\frac{\partial L}{\partial r} = q\frac{\partial (A.v)}{\partial r} - q\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = q\nabla(A.v) - q\nabla\mathcal{U}$$

L'équation de Lagrange donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{dp}{dt} + q\frac{\partial A}{\partial t} + q(v.\nabla)A = q\nabla(A.v) - q\nabla\mathcal{U}$$

$$\frac{dp}{dt} = q\nabla(A.v) - q\nabla\mathcal{U} - q\frac{\partial A}{\partial t} - q(v.\nabla)A$$

$$\frac{dp}{dt} = q[\nabla(A.v) - \nabla\mathcal{U} - \frac{\partial A}{\partial t} - (v.\nabla)A]$$

or on a l'identité du double produit vectoriel

$v\wedge(\nabla\wedge A) = \nabla(A.v) - (v.\nabla)A$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = q[-\nabla\mathcal{U} - \frac{\partial A}{\partial t} + v \wedge (\nabla \wedge A)]$$

Si on pose

$$\begin{cases} B = \nabla \wedge A \\ E = -\nabla\mathcal{U} - \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

On reconnait la force de Lorentz

f = q(E+v∧B)

¤ L'action du champ (E,B)

On a donc, à partir du quadrivecteur A^i on retrouve le champ (E,B), grâce à l'action $S_{c/p}$.

On veut maintenant trouver l'action du champ S_c lui-même.

Une action du champ sera du type:

$$S_c = \frac{1}{c}\int kL\,(A_i, \partial_k A_i)d\Omega$$

$$S_c = \frac{1}{c}\int k\zeta d\Omega \;;\; \text{ou } (S_c = \int k\zeta\, d\vartheta dt)$$

où ζ est un scalaire (champ scalaire) invariant et k une constante qu'on choisira, bien sûr le ζ doit aussi provenir du champ (E,B).

Nous essayons donc de trouver un scalaire invariant à partir de (E,B).

La technique est suivante:

On fait un changement de référentiel et voit comment (E,B) se transforme en (B',E') en espérant de repérer un invariant.

Allons y ....

Partons de la force de Lorentz

$f = q(E + v \wedge B)$

$f_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y)$

$f_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z)$

$f_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x)$

Réécrivons ces relations sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} f.v \\ \gamma f_x \\ \gamma f_y \\ \gamma f_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

Posons

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} f.v \\ \gamma f_x \\ \gamma f_y \\ \gamma f_z \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

d'où

$\mathcal{F}$ = qQU

c'est la force de Lorentz en formaliste matricielle.

Voyons comment (E,B) change quand on passe au référentiel R'

où $\beta = \frac{V}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, V=vitesse du repère R' par rapport à R.

$\mathcal{F}$'=L$\mathcal{F}$ et U'=LU

$\mathcal{F}$ = qQU

L$\mathcal{F}$ = qLQU

$\mathcal{F}'=q(L\ QL^{-1})U'$

or

$\mathcal{F}' = qQ'U'$

$\Rightarrow\ Q' = LQL^{-1}$

En multipliant ces matrices on trouve (j'espère que je ne me suis pas trompé !)

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{\gamma}{c}(E_y - VB_z) & \frac{\gamma}{c}(E_z + VB_y) \\ \frac{E_x}{c} & 0 & \gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) & -\gamma(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) \\ \frac{\gamma}{c}(E_y - VB_z) & -\gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) & 0 & B_x \\ \frac{\gamma}{c}(E_z + VB_y) & \gamma(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Or le principe de réciprocité exige que Q' soit de la forme

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & E'_x/c & E'_y/c & E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & B'_z & -B'_y \\ E'_y/c & -B'_z & 0 & B'_x \\ E'_z/c & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{V}{c^2}E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x^{'} = E_x \\ E_y^{'} = \gamma(E_y - VB_z) \\ E_z^{'} = \gamma(E_z + VB_y) \end{cases}$$

On voit donc que (E,B) n'est pas intrinsèque, puisqu'il dépend d'observateurs. pour certain observateur E=0 pour d'autre non, par ex si on prend E=0 ⇒ E'≠0

$$\begin{cases} E_x^{'} = 0 \\ E_y^{'} = -\gamma VB_z \\ E_z^{'} = \gamma VB_y \end{cases}$$

Et ici par miracle on observe qu'il y un invariant c'est !!

$$\frac{E^2}{c^2} - B^2$$

Montrons que

$$\frac{E^{'2}}{c^2} - B^{'2} = \frac{E^2}{c^2} - B^2$$

$$\frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} E_x^{'2} \\ E_y^{'2} \\ E_z^{'2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2/c^2 \\ \dfrac{\gamma^2 E_y^2}{c^2} - \dfrac{2\gamma^2 E_y VB_z}{c^2} + \gamma^2 V^2 B_z^2/c^2 \\ \dfrac{\gamma^2 E_z^2}{c^2} + 2\gamma^2 E_z VB_y/c^2 + \gamma^2 V^2 B_y^2/c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_x^{'2} = B^2{}_x \\ B_y^{'2} = \gamma^2 B^2{}_y + 2\gamma^2 B_y \dfrac{V}{c^2} E_z + \gamma^2 \dfrac{V^2}{c^4} E_z^2 \\ B_z^{'2} = \gamma^2 B^2{}_z - 2\gamma^2 B_z \dfrac{V}{c^2} E_y + \gamma^2 \dfrac{V^2}{c^4} E_y^2 \end{cases}$$

Calculons:

$$\frac{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}{c^2} - (B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2)$$

Les doubles produits s'en vont , il reste

$$\frac{\gamma^2 E_y^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{V^2}{c^4} E_y^2 = \gamma^2 (1 - \frac{V^2}{c^2}) \frac{E_y^2}{c^2} = \frac{E_y^2}{c^2}$$

$$\frac{\gamma^2 E_z^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{V^2}{c^4} E_z^2 = \gamma^2 (1 - \frac{V^2}{c^2}) \frac{E_z^2}{c^2} = \frac{E_z^2}{c^2}$$

$$\gamma^2 V^2 B_y^2/c^2 - \gamma^2 B^2{}_y = -\gamma^2 (1 - V^2/c^2) B_y^2 = -B_y^2$$

$$\gamma^2 V^2 B_z^2/c^2 - \gamma^2 B_z^2 = -\gamma^2 (1 - V^2/c^2) B_z^2 = -B_z^2$$

d'où

$$\frac{E'^2}{c^2} - B'^2 = \frac{E^2}{c^2} - B^2$$

Et voilà notre action S_c sera

$$S_c = \frac{1}{c} \int k (\frac{E^2}{c^2} - B^2) d\Omega$$

où k est une constante qu'on choisira.

Nous somme maintenant en mesure de retrouver les équations de Maxwell.

6.3 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Le champ électromagnétique (E,B) est donné par :

$$\begin{cases} \mathrm{B} = \nabla \wedge \mathrm{A} \\ \mathrm{E} = -\nabla \mathcal{U} - \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{t}} \end{cases}$$

$\nabla.\mathrm{B} = \nabla.(\nabla \wedge \mathrm{A}) = 0$

$$\nabla \wedge \mathrm{E} = \nabla \wedge \left(-\nabla \mathcal{U} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{t}}\right) = -\nabla \wedge \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\partial (\nabla \wedge \mathrm{A})}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\nabla \wedge \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}}$$

C'est le premier groupe des équations de Maxwell: propriétés du champ

$$\begin{cases} \nabla \,.\, \mathrm{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathrm{E} = -\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}} \end{cases}$$

On peut interpréter le premier groupe des équation de Maxwell.

Intégrer la 1ère équation du premier groupe sur un volume $\mathcal{V}$ limité par une surfasse $\mathcal{S}$ ça donne

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla.\,\mathrm{B}\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dS} = 0$$

Ca signifie que le flux magnétique à travers une surface fermée est nul, le champ magnétique B est à flux conservatif.

Cherchons maintenant la circulation de E sur un contour fermé $\mathcal{C}$ où s'appuie une surface $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{E}.\,\mathrm{dl} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \wedge \mathrm{E}.\,\mathrm{dS}$$

$$= -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}}.\,\mathrm{dS} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dS} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}$$

La circulation de E engendre l'induction.

Pour retrouver les équations du 2ème groupe on doit trouver les actions :

* action S_p de la particule de masse m :

$$S_p = \int (-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})dt$$

et pour une distribution de masse μ

$dm = \mu d\vartheta$

l'action sera

$$S_p = \int (-c^2 \mu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})\, d\vartheta dt$$

$$S_p = \frac{1}{c}\int(-c^2\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})\,d\Omega$$

* action du champ sur la particule $S_{c/p}$ (l'action de la particule sur le champ $S_{p/c}$ est négligeable)

$$S_{c/p} = q\int(A.v - \mathcal{U})dt$$

et pour une distribution de charge ρ

$dq = \rho d\vartheta$

ρ = distribution de charge (seules les charges mobiles génèrent un courant) , l'action devient

$$S_{c/p} = \int \rho(A.v - \mathcal{U})d\vartheta dt$$

$$S_{c/p} = \frac{1}{c}\int \rho(A.v - \mathcal{U})d\Omega$$

ça donne

$$L_{c/p} = \rho(A.v - \mathcal{U})$$

$$L_{c/p} = A.(\rho v) - \rho\mathcal{U} = A.j - \rho\mathcal{U} \quad ; \rho v = j$$

$$L_{c/p} = A.j - \rho\mathcal{U}$$

$$S_{c/p} = \frac{1}{c}\int(A.j - \rho\mathcal{U})d\Omega$$

* Et en fin l'action du champ lui-même S_c

$$S_c = \frac{1}{c}\int \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)d\Omega$$

on a choisi $k = \frac{1}{2\mu_0}$

finalement :

$S = S_p + S_{c/p} + S_c$

dans la variation $\delta S = 0$ on fait varier δA_i puisqu'on cherche les équations du champ. Le terme S_p ne contient pas A_i donc il ne sert à rien, il reste

$S = S_{c/p} + S_c$

d'où le lagrangien

$$L = A.j - \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)$$

$$L = A.j - \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{(-\nabla\mathcal{U} - \partial_t A)^2}{c^2} - (\nabla \wedge A)^2\right)$$

autrement dit faire varier $\delta S=0$ revient à appliquer le lagrangien L ci-dessus sur les équations du champ.

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_i} \quad ; k, i = 0,1,2,3$$

Attention !! : Il y a 3 façons de reconnaître un lagrangien :
1. $S = \int L dt$

2. $S = \int L d\vartheta dt$

3. $S = \frac{1}{c}\int L d\Omega$

par exemple si on a

$$S = \int (K^2 + cD) d\Omega$$

Le lagrangien est

$L = cK^2+c^2D$ et non $L = K^2+cD$!!! en effet il faut mettre l'intégrale sous la forme

$$S = \frac{1}{c}\int L d\Omega = \frac{1}{c}\int c(K^2 + cD) d\Omega = \frac{1}{c}\int (cK^2 + c^2D) d\Omega$$

de même

$$S = \frac{1}{c}\int (cK - Q^2) d\vartheta dt$$

Le lagrangien est

$L = K - \frac{1}{c}Q^2$ et non $L = cK - Q^2$!!! en effet il faut mettre l'intégrale sous la forme

$$S = \int L d\vartheta dt = \int \frac{1}{c}(cK - Q^2) d\vartheta dt = \int (K - \frac{1}{c}Q^2) d\vartheta dt$$

Donc soyez vigilant ...

Rappel : $E^2 = E \,.\, E = ||E||^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$

$$L = A.j - \rho\mathcal{U} + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{(-\nabla\mathcal{U} - \partial_t A)^2}{c^2} - (\nabla \wedge A)^2\right)$$

Écrivons explicitement L

$L = A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z - \rho\mathcal{U}$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}[(\partial_x\mathcal{U} + \partial_t A_x)^2 + \left(\partial_y\mathcal{U} + \partial_t A_y\right)^2 + (\partial_z\mathcal{U} + \partial_t A_z)^2]$$

$$-\frac{1}{2\mu_0}[\left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)^2 + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)^2$$
$$+\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)^2]$$

* $i=0 \Rightarrow A_0 = \mathcal{U}/c$

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_k\left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)\right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathcal{U}}{c}\right)}$$

$\partial_0 = \partial_{ct} = \frac{1}{c}\partial_t$

comme $c\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\mathcal{U})} = 0$; pas de $\partial_t\mathcal{U}$ dans L

et attention !! $\partial_x\mathcal{U} + \partial_t A_x = -E_x$

$$-\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{3} \partial_k \left(E_k\right) = -\rho$$

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

* $i=1 \Rightarrow A_1 = - A_x$

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_x)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_x}$$

$$c\frac{\partial L}{\partial(\partial_t A_x)} = -cE_x \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_y A_x)} = -B_z \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_z A_x)} = B_y$$

$$-\varepsilon_0 \partial_t E_x + \frac{1}{\mu_0}(\partial_y B_z - \partial_z B_y) = j_x$$

* $i=2 \Rightarrow A_2 = - A_y$

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_y)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_y}$$

$$c\frac{\partial L}{\partial(\partial_t A_y)} = -cE_y \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_x A_y)} = B_z \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_z A_y)} = -B_x$$

$$-\varepsilon_0 \partial_t E_y + \frac{1}{\mu_0}(\partial_z B_x - \partial_x B_z) = j_y$$

* $i=3 \Rightarrow A_3 = - A_z$

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_z)} \right) = \frac{\partial L}{\partial A_z}$$

$$c\frac{\partial L}{\partial(\partial_t A_z)} = -cE_z \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_x A_z)} = -B_y \; ; \frac{\partial L}{\partial(\partial_y A_z)} = B_x$$

$$- \varepsilon_0 \partial_t E_z + \frac{1}{\mu_0}(\partial_x B_y - \partial_y B_x) = j_z$$

d'après ce longue calcul on trouve

$$\nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Youpi !!!!!

Le deuxième groupe des équations de Maxwell: relations entre le champ et les sources

$$\begin{cases} \nabla . E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

Voyons ce que signifie les équations du 2ème groupe.

Intégrer la 1ère équation du 2ème groupe sur un volume $\mathcal{V}$ limité par une surface $\mathcal{S}$ ça donne

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla . E \, d\vartheta = \int_{\mathcal{S}} E . dS$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\vartheta = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

où Q désigne la charge contenue dans le volume $\mathcal{V}$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{E}.\,\mathrm{dS} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0}$$

ça signifie que le flux de E est égale à la charge intérieur du volume divisée par ε_0 .

Cherchons maintenant la circulation de B sur un contour fermé $\mathcal{C}$ où s'appuie une surface $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \wedge \mathrm{B}.\,\mathrm{dS}$$

$$= \int_{\mathcal{S}} (\mu_0 \mathrm{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}}).\,\mathrm{dS} = \int_{\mathcal{S}} \mu_0 \mathrm{j}.\,\mathrm{dS} + \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}}.\,\mathrm{dS}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \mathrm{j}.\,\mathrm{dS} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}}.\,\mathrm{dS}$$

Traditionnellement on pose

$\mathrm{I} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{j}.\,\mathrm{dS}$; courant

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}}.\,\mathrm{dS}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \mathrm{j}.\,\mathrm{dS} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}}.\,\mathrm{dS}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl} = \mu_0 \mathrm{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \mathrm{I}_1$$

La circulation de B engendre des courants traversant la surface $\mathcal{S}$.

I. à partir du deuxième groupe des équations de Maxwell on peut retrouver l'équation de conservation de charge.

$$\begin{cases} \nabla . \mathrm{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathrm{B} = \mu_0 \mathrm{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}} \end{cases}$$

$$\nabla . (\nabla \wedge \mathrm{B}) = \mu_0 \nabla . \mathrm{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\nabla . \mathrm{E})}{\partial \mathrm{t}}$$

$$0 = \nabla . \mathrm{j} + \frac{\partial (\varepsilon_0 \nabla . \mathrm{E})}{\partial \mathrm{t}}$$

$$0 = \nabla . \mathrm{j} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}}$$

II. Tout au début de ce chapitre, on a supposé que $A^i=(\mathcal{U}/c,A)$ est un quadrivecteur, grâce aux équations de Maxwell et le jauge de Lorenz on va montrer que c'est bien un quadrivecteur .
Allons-y

$$\begin{cases} \nabla . \mathrm{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathrm{B} = \mu_0 \mathrm{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{t}} \end{cases}$$

De

$$\begin{cases} B = \nabla \wedge A \\ E = -\nabla \mathcal{U} - \dfrac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

Comme on a choisi le jauge de Lorenz

$$\nabla . A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0$$

on en déduit

$$* \ \nabla . E = -\nabla . (\nabla \mathcal{U}) - \frac{\partial (\nabla . A)}{\partial t}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{U}$$

* $\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla(\nabla.A) - (\nabla.\nabla)A = \nabla(\nabla.A) - \Delta A$

$$\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}) - \Delta A$$

$$\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial (\nabla \mathcal{U})}{\partial t} - \Delta A$$

$$\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial (-E - \partial_t A)}{\partial t} - \Delta A$$

$$\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A$$

$$\mu_0 j = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A$$

finalement avec les équations de Maxwell et le jauge de Lorenz on arrive aux équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{U} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (\mathcal{U}/c)}{\partial t^2} - \Delta(\mathcal{U}/c) = \mu_0 \rho c \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = \mu_0 j \end{cases}$$

en a :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Or l'opérateur □ (d 'Alembertien) est invariant par la transformation de Lorentz et que (ρc, j) est un quadrivecteur d'où

$-\square A^i = \mu_0 j^i$

$-\square' A'^i = \mu_0 j'^i$

$-\square A'^i = \mu_0 j'^i$

$-\square A'^i = \mu_0 L^i_k j^k$

$-\square A'^i = L^i_k \mu_0 j^k = L^i_k (-\square A^k) = -\square L^i_k A^k$

$\square(A'^i - L^i_k A^k) = 0$

$A'^i - L^i_k A^k = 0$

$A'^i = L^i_k A^k$

Ce qui montre que A^i est un quadrivecteur

Remarque

Le fait que A^i est un quadrivecteur est ultimement lié avec le jauge de Lorentz et les équations de Maxwell.

II. Vecteur de Poynting

Le champ (E,B) possède de l'énergie $\mathcal{E}$ dont la distribution est $\mathscr{k}$:

$$\mathscr{k} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})$$

$d\mathcal{E} = \mathscr{k} d\vartheta$

Quand le champ (E,B) se propage l'énergie $\mathcal{E}$ se propage aussi dans la direction $\mathcal{K}$ nommée vecteur de Poynting

$$\mathcal{K} = \frac{E \wedge B}{\mu_0}$$

calculons

$\nabla.(E \wedge B) = (\nabla \wedge E).B - (\nabla \wedge B).E$

$$= -\frac{\partial B}{\partial t}.B - (\mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}).E$$

$$\nabla.\mathcal{K} = -\frac{\partial B}{\partial t}.B\frac{1}{\mu_0} - j.E - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.E$$

$$\nabla.\mathcal{K} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}_0 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) - j.E$$

$$\nabla.\mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{k}}{\partial t} = -j.E$$

Quand il n'y a pas de courant j=0 ça donne

$$\nabla.\mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{k}}{\partial t} = 0$$

6.4 FORMULATION TENSORIELLE

On a défini le champ électromagnétique par un quadrivecteur: $A^i = (\mathcal{U}/c, A)$

et on est arrivé à former deux champs de vecteurs (E,B)

$$\begin{cases} B = \nabla \wedge A \\ E = -\nabla\mathcal{U} - \dfrac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

Mais on a vu que ces champs ne sont pas vraiment intrinsèques car ils dépendent de l'observateur, il faut trouver quelque chose qui ne dépend pas de l'observateur donc propre au champ.

On pose donc

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_j$

Note : F_{ij} est antisymétrique c'est une bonne chose

On remarque immédiatement que cette objet F_{ij} est un tenseur restreint en effet on sait que ∂_i est un quadrivecteur et A_j aussi, le produit

$K_{ij} = \partial_i A_j$

donne un tenseur restreint, on effet

$$K'_{uv} = \partial'_u A'_v = \ell^i_u \, \partial_i \ell^j_v A_j$$

$$K'_{uv} = \ell^i_u \ell^j_v \, \partial_i A_j$$

$$K'_{uv} = \ell^i_u \ell^j_v K_{ij}$$

K_{ij} se transforme suivant la loi Lorentzienne, ce qui montre bien que F_{ij} est un tenseur restreint .

¤ La force de Lorentz en tensorielle

On veut exprimer la force de Lorentz sous la forme tensorielle.

L'idée c'est trouver l'équation du mouvement à partir de la variation (par rapporte à δx) de l'action δS, en effet dans l'équation du mouvement il figure la force de Lorentz

Allons y

On a déjà S_p

$$S_p = \int -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

comme $ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$, d'où

$$S_p = \int -mc\, ds$$

et l'action du champ/particule est

$$S_{c/p} = -q \int A_i dx^i$$

$$S = \int -mcds - qA_i dx^i$$

$$\delta S = \int -mc\, \delta(ds) - q\, \delta A_i\, dx^i - qA_i\, \delta dx^i$$

¤ Calculons δds

$ds^2 = dx_i\, dx^i$

$$ds = \frac{dx_i}{ds} dx^i$$

$$ds = \frac{1}{c} u_i dx^i$$

(6.4.1) $\delta(ds) = \frac{1}{c} u_i\, \delta dx^i$

une autre méthode

$\delta ds^2 = \delta dx_i \ dx^i + dx_i \ \delta dx^i$

$2ds\ \delta ds = \delta dx_i \ dx^i + dx_i \ \delta dx^i$

Le produit scalaire est symétrique $a.b=a_ib^i=a^ib_i$

$2ds\ \delta ds = \delta dx^i \ dx_i + dx_i \ \delta dx^i$

$ds\ \delta ds = \ dx_i \ \delta dx^i$

$$\delta ds = \frac{dx_i}{ds}\ \delta dx^i = \frac{1}{c} u_i\ \delta dx^i$$

on retrouve la même formule (6.4.1)

¤ Calculons

$\delta A_i = \partial_k A_i\ dx^k$

$-mc\ \delta(ds) - q\ \delta A_i\ dx^i - qA_i\ \delta dx^i$

$$-mc\left(\frac{1}{c} u_i\ \delta dx^i\right) - q\delta A_i dx^i - qA_i\ \delta dx^i$$

$-(mu_i + qA_i)\ \delta dx^i - q\ \delta A_i dx^i$

$d\ [(mu_i+qA_i)\ \delta x^i\ ] = (m\ du_i + q\ dA_i)\ \delta x^i + (mu_i+qA_i)\ \delta dx^i$

$d\ [(mu_i+qA_i)\ \delta x^i\ ] - \ (m\ du_i + q\ dA_i)\ \delta x^i = (mu_i+qA_i)\ \delta dx^i$

$$\int (m\, du_i + qdA_i)\ \delta x^i - q\ \delta A_j dx^j$$

$$dA_i = \partial_j A_i dx^j$$

$$\delta A_j = \partial_i A_j \delta x^i$$

$$\int (m\, du_i + q\, \partial_j A_i dx^j)\, \delta x^i - q\, \partial_i A_j \delta x^i\, dx^j$$

$$\int (m\, du_i + q(\partial_j A_i - \partial_i A_j)\, dx^j)\, \delta x^i$$

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{u^i}{c}$$

$$\delta S = \int [m\frac{du_i}{ds} - \frac{q}{c}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)u^j]\, \delta x^i ds$$

$$\delta S = \int [m\frac{du_i}{ds} - \frac{q}{c}F_{ij}u^j]\, \delta x^i ds$$

$\delta S = 0$ quel que soit δx donc

$$m\frac{du_i}{ds} - \frac{q}{c}F_{ij}u^j = 0$$

$$mc\frac{du_i}{ds} = qF_{ij}u^j$$

or la force vaut

$$\mathcal{f}_i = \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{dp_i}{ds}\frac{ds}{d\tau} = \frac{dp_i}{ds}c$$

$$\mathcal{f}_i = \frac{d(mu_i)}{ds}c = mc\frac{du_i}{ds}$$

$$\mathcal{f}_i = qF_{ij}u^j$$

Vérifions si c'est bien la force de Lorentz, on calcule les valeurs de F_{ij} en fonction de (E,B)

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$

* $F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c}\partial_t(-A_x) - \partial_x(\mathcal{U}/c) = E_x/c$

$F_{02} = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 = \frac{1}{c}\partial_t(-A_y) - \partial_y(\mathcal{U}/c) = E_y/c$

$F_{03} = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 = \frac{1}{c}\partial_t(-A_z) - \partial_z(\mathcal{U}/c) = E_z/c$

* $F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \partial_x(-A_y) - \partial_y(-A_x) = -B_z$

$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \partial_x(-A_z) - \partial_z(-A_x) = B_y$

$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y(-A_z) - \partial_z(-A_y) = -B_x$

Pour les autres termes on utilise l'antisymétrique de F_{ij} ce qui donne

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{f}_i = qF_{ij}u^j$

$u_i = (\gamma c, -\gamma v)$, $\mathcal{f}_i = (\gamma \mathcal{P}/c, -\gamma f)$

$\mathcal{f}_1 = q(F_{10}u^0 + F_{11}u^1 + F_{12}u^2 + F_{13}u^3)$

$\mathcal{f}_1 = -\gamma q(E_x + B_z v_y - B_y v_z)$

$\mathcal{f}_2 = q(F_{20}\, u^0 + F_{21}\, u^1 + F_{22}\, u^2 + F_{23}\, u^3)$

$\mathcal{f}_2 = -\gamma q(E_y - B_z v_x + B_x v_z)$

$\mathcal{f}_3 = q(F_{30}\, u^0 + F_{31}\, u^1 + F_{32}\, u^2 + F_{33}\, u^3)$

$\mathcal{f}_3 = -\gamma q(E_z + B_y v_x - B_x v_y)$

or

$\mathcal{f}_1 = -\gamma f_x$

$f_x = q(E_x + B_z v_y - B_y v_z)$

$f_y = q(E_y - B_z v_x + B_x v_z)$

$f_z = q(E_z + B_y v_x - B_x v_y)$

d'où

$f = q(E + v \wedge B)$

$\mathcal{f}_i$ est bien la force de Lorentz

Pour monter les indices on utilise la métrique η_{ij} comme d'habitude

$F^{ij} = \eta^{ik}\eta^{jm} F_{km}$

$F^{01} = \eta^{00}\eta^{11} F_{01} = (1)(-1)E_x/c = -E_x/c$

$F^{12} = \eta^{11}\eta^{22} F_{12} = (-1)(-1)(-B_z) = -B_z$; etc ....

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur restreint F_{ij} montre que les champs B et E ne sont pas indépendants mais ils font partie d'un seul objet F_{ij}

¤ Les équations de Maxwell en tensorielle

Pour trouver le premier groupe des équations de Maxwell en formaliste tensorielle c'est assez facile, il suffit de dériver le F_{ij}.

$\partial_k F_{ij} = \partial_k(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \partial_k\partial_i A_j - \partial_k\partial_j A_i$

$\partial_i F_{jk} = \partial_i\partial_j A_k - \partial_i\partial_k A_j$

$\partial_j F_{ki} = \partial_j\partial_k A_i - \partial_j\partial_i A_k$

comme $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ (théorème de Schwarz)

$\partial_{(k}F_{ij)} \overset{def}{\equiv} \partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} = 0$; permutation circulaire kij et k<i<j

$\partial_{(k}F_{ij)} = 0$; k<i<j

c'est le premier groupe des équations de Maxwell

Vérifions si c'est bien ça

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\partial_{(k}F_{ij)} = 0$; k<i<j

$\partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} = 0$ avec k<i<j

1<2<3 :
$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z = 0 \Rightarrow \nabla.B=0$

0<2<3:
$\partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = -\frac{1}{c}\partial_t B_x - \frac{1}{c}\partial_y E_z + \frac{1}{c}\partial_z E_y = 0$; x
0<1<3:
$\partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = \frac{1}{c}\partial_t B_y - \frac{1}{c}\partial_x E_z + \frac{1}{c}\partial_z E_x = 0$; y
0<1<2:
$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = -\frac{1}{c}\partial_t B_z - \frac{1}{c}\partial_x E_y + \frac{1}{c}\partial_y E_x = 0$; z

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

c'est bien le premier groupe des équations de Maxwell

$$\partial_{(k}F_{ij)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla . B = 0 \\ \nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{cases}$$

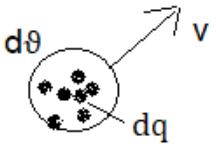
Pour le 2ème groupe des équations de Maxwell en tensoriel, c'est un peu plus compliqué. Ce sont des relations qui lient le champ et les sources. L'une des façons de s'en sortir c'est passer par l' action S.

Mais avant de chercher S, on doit faire quelques calculs.

Soient ρ une distribution de charge (mobile par rapport à R, l'observateur)

et dq la charge contenue dans un élément de volume dϑ (mobile par rapport à R, l'observateur)

$dq = \rho \, d\vartheta$



on définit alors le vecteur courant j par

$j = \rho v$; où v=vitesse des charges mobiles

$\rho = \gamma \rho_0$; ρ_0 une distribution de charge propre

et le quadrivecteur courant j^i par

$j^i = \rho_0 u^i$; u^i = quadrivecteur de vitesse des charges

$j^i = \rho_0 u^i = (\rho_0 \gamma c, \rho_0 \gamma v) = (\rho c, \rho v) = (\rho c, j)$

u^i est un quadrivecteur et ρ_0 est un invariant donc j^i est un quadrivecteur.

Remarque

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$$

$\frac{dx^i}{dt}$ n'est pas un quadrivecteur et ρ n'est pas un invariant mais ensemble $(\rho \frac{dx^i}{dt})$ ils forment un quadrivecteur !!

Pour voir que ρ_0 est un scalaire invariant on raisonne de façon suivante:

Dans R_0 , un référentiel où les charges q sont immobiles

on a

$dq = \rho_0 \, d\vartheta_0$

Dans R, un référentiel où les charges q se déplacent à la vitesse v, on a

$dq = \rho d\vartheta$ (les charges sont invariantes)

$\rho_0 \, d\vartheta_0 = \rho d\vartheta = \rho \, d\vartheta_0/\gamma$

$\rho_0 = \rho/\gamma$

Donc dans R', un référentiel où les charges q se déplacent à la vitesse v', on aura

$\rho_0 = \rho'/\gamma'$

d'où

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\rho'}{\gamma'}$$

La quantité ρ/γ ne dépend pas de R, R' , ... , donc c'est un invariant, càd ρ_0 est un invariant .

On doit donc trouver un lagrangien L mais cette fois-ci il dépend le champ c'est-à-dire A^i et les sources ρ (charge) et j (courant)

$L(A_i, \partial_k A_i)$; i,k =0,1,2,3

Ce lagrangien comporte deux parties:

* l'interaction du champ sur la particule (celle de la particule sur le champ est négligeable). Dans le cas d'une particule on a:

$$S_{c/p} = -q \int A_i dx^i$$

donc pour une distribution de charge ρ on a

$$S_{c/p} = -\int \rho A_i \, dx^i d\vartheta$$

en multipliant dt/dt , et $d\vartheta dt = d\Omega/c$ (car $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ et $d\vartheta = dxdydz$) ça donne

$$S_{c/p} = -\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i \, d\vartheta dt = -\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i \, d\Omega$$
$$= \frac{1}{c}\int (-j^i A_i) \, d\Omega$$

* On a déjà l'action du champ S_c en fonction de (E,B) il suffit d'exprimer (E,B) en fonction du tenseur F_{ij} du champ. On a l'égalité suivante

$$B^2 - \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}$$

en effet

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit de faire la sommation c'est tout !!

$$F_{0j}F^{0j} = -\frac{E_x^2}{c^2} - \frac{E_y^2}{c^2} - \frac{E_z^2}{c^2}$$

$$F_{1j}F^{1j} = -\frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_y^2$$

$$F_{2j}F^{2j} = -\frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2$$

$$F_{3j}F^{3j} = -\frac{E_z^2}{c^2} + B_y^2 + B_x^2$$

$$F_{ij}F^{ij} = 2B^2 - 2\frac{E^2}{c^2}$$

d'où

$$S_c = \frac{1}{c}\int \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)d\Omega$$

$$S_c = \frac{1}{c}\int \left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{ij}F^{ij}\right)d\Omega$$

$$S = \frac{1}{c}\int \left(-j^i A_i - \frac{1}{4\mu_0}F_{ij}F^{ij}\right)d\Omega$$

d'où

$$L = -j^i A_i - \frac{1}{4\mu_0}F_{ij}F^{ij}$$

et on applique ce lagrangien L à l'équation du champ

$$\sum_{k=0}^{3} \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\right) = \frac{\partial L}{\partial A_i} \quad ; k, i = 0,1,2,3$$

il est prudent de nommer les indices de sommation dans L pour qu'ils soient différents de (k,i) les indices fixes dans l'équation du champ.

$$L = -j^p A_p - \frac{1}{4\mu_0}F_{st}F^{st}$$

On calcule successivement les termes ...

<u>* d'une part</u>

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = -j^i$$

Car dans la somme j^pA_p il y a un seul terme en 'i' .

si on note j^iA_i on trouve le même résultat, mais on ne voit pas qu'on a une somme !! .

$\frac{d}{dx}(ax) = a$

$\frac{d}{dx}(bt+dv+ax+ct+fy)=a$

<u>* d'antre part</u>

$F^{st} = \eta^{su}\,\eta^{tv}\,F_{uv}$; les indices 'sum' doivent être différents de (ik)

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(F_{st}F^{st}) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(F_{st}\,\eta^{su}\eta^{tv}\,F_{uv})$$

$$= \eta^{su}\eta^{tv}F_{uv}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\,F_{st}) + F_{st}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\eta^{su}\eta^{tv}\,F_{uv})$$

$$= \eta^{su}\eta^{tv}F_{uv}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\partial_s A_t - \partial_t A_s\,)$$
$$+ F_{st}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\eta^{su}\eta^{tv}(\partial_u A_v - \partial_v A_u))$$

$$= F_{uv}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_s A_t - \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_t A_s\,)$$
$$+ F_{st}\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}(\eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_u A_v - \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_v A_u)$$

Dans la somme $\eta^{su}\eta^{tv}\partial_s A_t$ il y a un seul terme (k,i), d'où

$¤\ \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_s A_t \rightarrow \eta^{ku}\eta^{iv}\,\partial_k A_i$

$¤\ \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_t A_s \rightarrow \eta^{iu}\eta^{kv}\,\partial_k A_i$

$¤\ \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_u A_v \rightarrow \eta^{sk}\eta^{ti}\,\partial_k A_i$

$¤\ \eta^{su}\eta^{tv}\,\partial_v A_u \rightarrow \eta^{si}\eta^{tk}\,\partial_k A_i$

$= F_{uv}\eta^{ku}\eta^{iv} - F_{uv}\eta^{iu}\eta^{kv} + F_{st}\eta^{sk}\eta^{ti} - F_{st}\eta^{si}\eta^{tk}$

On monte !!

$= F^{ki} - F^{ik} + F^{ki} - F^{ik}$

$= F^{ki} + F^{ki} + F^{ki} + F^{ki} = 4F^{ki}$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_k A_i)}\left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{st}F^{st}\right) = -\frac{1}{\mu_0}F^{ki}$$

finalement

$\partial_k F^{ki} = \mu_0 j^i \quad ;\ i=0,1,2,3$

Note: c'est la sommation sur l'indice intérieur de F^{k-}

Vérifions si c'est bien le 2ème groupe.

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$j^i = (\rho c, j)$

* i=0

$\partial_k F^{k0} = \mu_0 j^0$

$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 j^0$

$\frac{1}{c}\partial_t 0 + \frac{1}{c}\partial_x E_x + \frac{1}{c}\partial_y E_y + \frac{1}{c}\partial_z E_z = \mu_0 j^0$

$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = c\ \mu_0 j^0$

$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = c^2\ \mu_0 \rho$

$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = c^2\ \mu_0 \rho / \varepsilon_0$ car $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

* i=1

$\partial_k F^{k1} = \mu_0 j^1$

$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 j^1$

$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_x + \frac{1}{c}\partial_y B_z - \frac{1}{c}\partial_z B_y = \mu_0 j_x$

* i=2

$\partial_k F^{k2} = \mu_0 j^2$

$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} = \mu_0 j^2$

$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_y - \frac{1}{c}\partial_x B_z + \frac{1}{c}\partial_z B_x = \mu_0 j_y$

* i=3

$\partial_k F^{k3} = \mu_0 j^3$

$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} = \mu_0 j^3$

$-\frac{1}{c^2}\partial_t E_z + \frac{1}{c}\partial_x B_y - \frac{1}{c}\partial_y B_x = \mu_0 j_z$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

On retrouve bien le 2ème groupe.

$$\partial_k F^{ki} = \mu_0 j^i \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

On peut retrouver l'équation de conservation de charge à partir du 2ème équation tensorielle

$\mu_0 j^i = \partial_k F^{ki}$

$\mu_0 \partial_i j^i = \partial_i \partial_k F^{ki}$

$\mu_0 \partial_i j^i = \partial_k \partial_i F^{ki}$ th: Schwarz

$\mu_0 \partial_i j^i = \partial_i \partial_k F^{ik}$ changement indices (k,i)→(i,k)

$\mu_0 \partial_i j^i = -\partial_i \partial_k F^{ki}$ antisymétrique de F^{ij}

comme on a aussi

$\mu_0 \partial_i j^i = \partial_i \partial_k F^{ki}$

d'où

$\mu_0 \partial_i j^i = - \mu_0 \partial_i j^i \Rightarrow \partial_i j^i = 0$

$\partial_i j^i = 0$ c'est l'équation de conservation de charge, en effet

$\partial_i j^i = 0$

$\partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = 0$

$\frac{1}{c}\partial_t(\rho c) + \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z = 0$

$$\nabla . j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Les 4 équations de Maxwell en formulation vectorielle

$$\begin{cases} \nabla . B = 0 \\ \nabla \wedge E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla . E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \wedge B = \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

En formulation tensorielle on a unifié les deux premières, et les deux dernières ce qui fait qu'on n'a que deux belles équations tensorielles :

$$\begin{cases} \partial_{(k} F_{ij)} = 0 \; ; k < i < j \\ \partial_k F^{ki} = \mu_0 j^i \; ; i = 0,1,2,3 \end{cases}$$

7 CONCLUSION

La relativité restreinte est née pour résoudre le confit entre la mécanique newtonienne et l'électromagnétique de Maxwell, elle unifie aussi un certain nombre de concepts qui étaient jusqu'alors indépendants.

Le formaliste mathématique que supporte la relativité restreinte est les quadrivecteurs qui se trouve dans l'espace nommée Minkowski

* position: $r=(x,y,z) \rightarrow x^i = (ct,x,y,z)$ quadri-position

* vitesse: $v=\frac{dr}{dt} \rightarrow u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (\gamma c,\gamma v)$ quadri-courant

* énergie: $E=\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow E=\gamma mc^2$

* impulsion: $p=mv \rightarrow p^i = mu^i = (E/c,m\gamma v)$ quadri-impulsion

* force: $f = m\,a \rightarrow f^i = \left(\frac{\gamma}{c}\mathcal{P}, \gamma f\right)$ quadri-force

* courant: $j=\rho v \rightarrow j^i = (\rho c,j)$ quadri-courant

.....

Bien sûr on peut faire la relativité restreinte sans quadrivecteurs, autrement dit on n'utilise que des vecteurs, mais cela cache beaucoup la réalité.

La relativité restreinte ne résout pas le problème de la gravitation, c'est-à-dire qu'il faut remplacer la formule

$$f = -G\frac{Mm}{r^2}u$$

Dans cette formule, l'information, le message que M signale à m qu'il bouge se propage instantanément or en relativité restreinte rien ne peut aller plus vite que la lumière, ce qui nous mène au saison 2: la relativité générale.

Dans la relativité restreinte, on manipule trois objets qui ne sont pas des quadrivecteurs
u^i , j^i, F^{ij} , ...
mais de vrai tenseurs !

On voit donc que la relativité restreinte n'est pas complète, elle laisse voir d'une autre théorie plus grande qui manipule u^i, j^i, F^{ij} , ... c'est justement c'est la relativité général.
.....

Allez voir la saison 2 (la relativité générale) .....
(Fin la saison 1)

TABLE DES MATIÈRES

1 La mécanique newtonienne 1
1.1 Référentiel 1
1.2 Transformation 3
1.3 Principe de réciprocité 7
(1.3.1) ctx = AR/R′ct′x′ 7
2 La naissance de la relativité restreinte 11
(2.1.1) df = ∂f ∂tdt + ∂f ∂xdx 15
(2.1.2) df = ∂f ∂t′dt′ + ∂f ∂x′dx′ 15
2.2 La transformation de Lorentz 18
2.3 Vérification 27
(2.3.1) df = ∂_t dt + ∂_x dx 31
3 Nouveaux concepts de longueur et le temps 36
3.1 la longueur propre 36
3.2 Le paradoxe du train et le tunnel 56
3.3 Le temps propre 64
3.4 Paradoxe des jumeaux 70
(3.4.1) t = γτ 72
4 Rappel, notation et convention 92
4.1 Les tenseurs, quadrivecteurs 95
(4.1.1) A′uv w = ∂x′w ∂xk ∂xi ∂x′u ∂xj ∂x′vAij k 95

(4.1.2) Aij k = ∂xk ∂x′w ∂x′u ∂xi ∂x′v ∂xjAuv′ w95
(4.1.3) A′u = LiuAi 96
(4.1.4) Ai = ℓuiA′u 97
4.2 L'espace-temps de Minkowski 99
4.3 Les quadrivecteurs usuels 102
4.4 L'Intervalle 109
5 Dynamique relativiste 117
5.1 L'équation du mouvement 118
(5.1.1) L_1 = L + 2dQdt où Q(x) est une fonction de x(t) 123
5.2 Le mouvement d'une particule libre 132
5.3 Les forces 134
(5.3.1) f = ma (f = dpdt) 134
5.4 Les angles 142
5.5 L'effet Doppler-Fizeau 150
5.6 L'aberration de la lumière 161
5.7 La conservation du quadri impulsion 167
5.8 Collision 171
5.9 Energie du seuil 176
5.10 Choc élastique 177
5.11 Désintégration 183
5.12 Quadri impulsion d'un photon 185
6 Electromagnétique 190
6.1 Formaliste vectorielle 190

6.2 L'équation du champ 191
6.3 Les équations de Maxwell 203
6.4 Formulation tensorielle 216
(6.4.1) $\delta(ds) = 1cui\ \delta dxi$ 218
7 Conclusion 235

Du même auteur

¤*1 La conjecture de Fermat*

C'est un livre qui démontre la conjecture de Fermat, (appelé souvent "le dernier théorème de Fermat") en s'appuyant sur deux théorèmes: le théorème de Ribet et le théorème de Wiles. Un document rare et exceptionnel.

© Juin-2015, Morphocode CODE

¤*2 La Relativité Générale*

Tout sur la Relativité Générale et on trouve une démonstration de l'équation tensorielle d'Einstein à partir du principe moindre action, ce qui est très rare.

© Décembre-2016, Morphocode CODE

¤*3 Le Groupe du Rubik's Cube (Tome I, II)*

Le Rubik's Cube possède un groupe très riche en propriétés et si la partie mathématique du puzzle vous intéresse alors ce livre est pour vous.

© Mars-2017, Morphocode CODE

¤*4 La Relativité Restreinte*

La Relativité Restreinte est une théorie physique proposée par Einstein pour remplacer la mécanique newtonienne quand la vitesse des objets est proche à celle de la lumière c.

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤*5 Les nombres transcendants*

Les nombres transcendants sont très mystérieux, ils sont partout, beaucoup plus nombreux que les nombres algébriques et pour tant on connaît très peu de ces nombres, le premier est e, puis π, cos(1) , ...

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤*6 Les twists et les maths*

Pour comprendre les propriétés des twists il faut passer par les mathématiques, à chaque twist on associe un groupe et ce sont des propriétés de ce groupe qui expliquent les propriétés du twist.

© Mars-2018, Morphocode CODE

¤*7 La physique quantique (Tome I, II)*

Si vous voulez savoir ce que c'est la physique quantique , ce livre est pour vous.

© Sept-2018, Morphocode CODE